PROIECTAREA ALGORITMILOR

Lect. univ. dr. Adrian Runceanu

Curs 8

Elemente de teoria grafurilor (partea III)

Conţinutul cursului

8.1. Grafuri orientate. Definiții.
8.2. Reprezentarea grafurilor orientate
8.3. Parcurgerea grafurilor orientate
8.4. Probleme rezolvate
8.5. Subiecte tip grilă

Definitie

Se numeşte **graf orientat** o pereche ordonată de mulţimi **G=(X,U),** unde:

- **X** este o mulţime finită şi nevidă numită mulţimea vârfurilor (nodurilor),
- iar **U** este o mulţime formată din perechi ordonate de elemente distincte din **X** numită mulţimea arcelor.

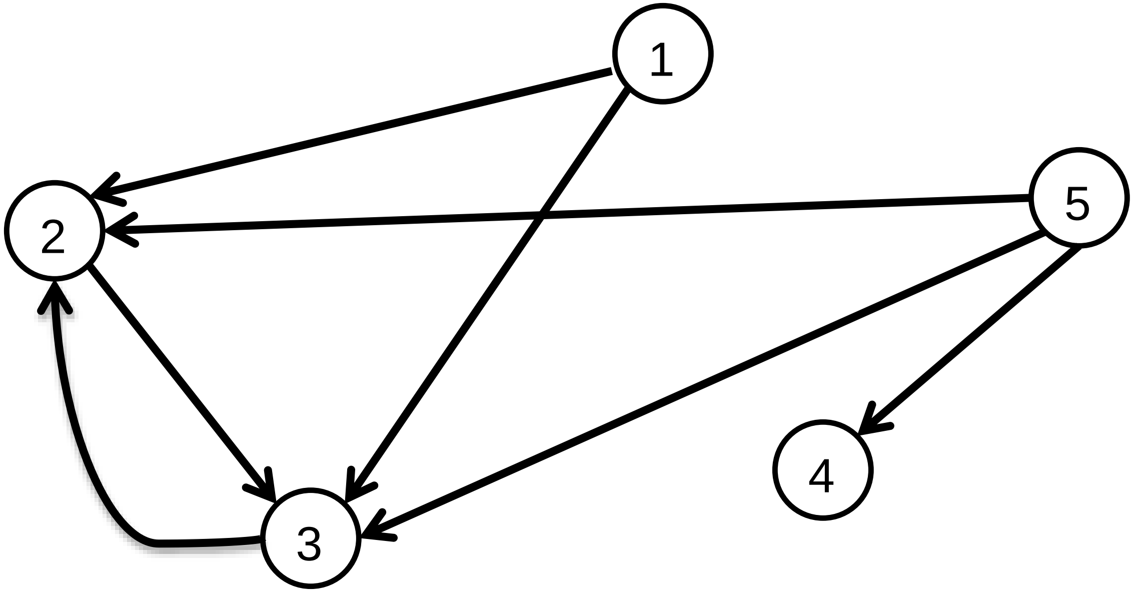
Daca eliminam o muchie, graful isi pierde proprietatea de conexitate, iar daca adaugam o muchie, apare un ciclu.

8.1. Definiţii

Exemplu:

X = {1, 2, 3, 4, 5};

U = {(1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (5,2), (5,3), (5,4)};



Notatie

Orice arc se noteazăc cu **u=(x,y)** şi spunem că **x** este extremitate iniţială şi **y** este extremitate finală a arcului.

Definitie

Pentru graful G=(X,U) dacă există arcul **u=(x,y)** spunem că vârfurile **x** şi **y** sunt adiacente şi amândouă sunt incidente cu arcul u.

Observatie

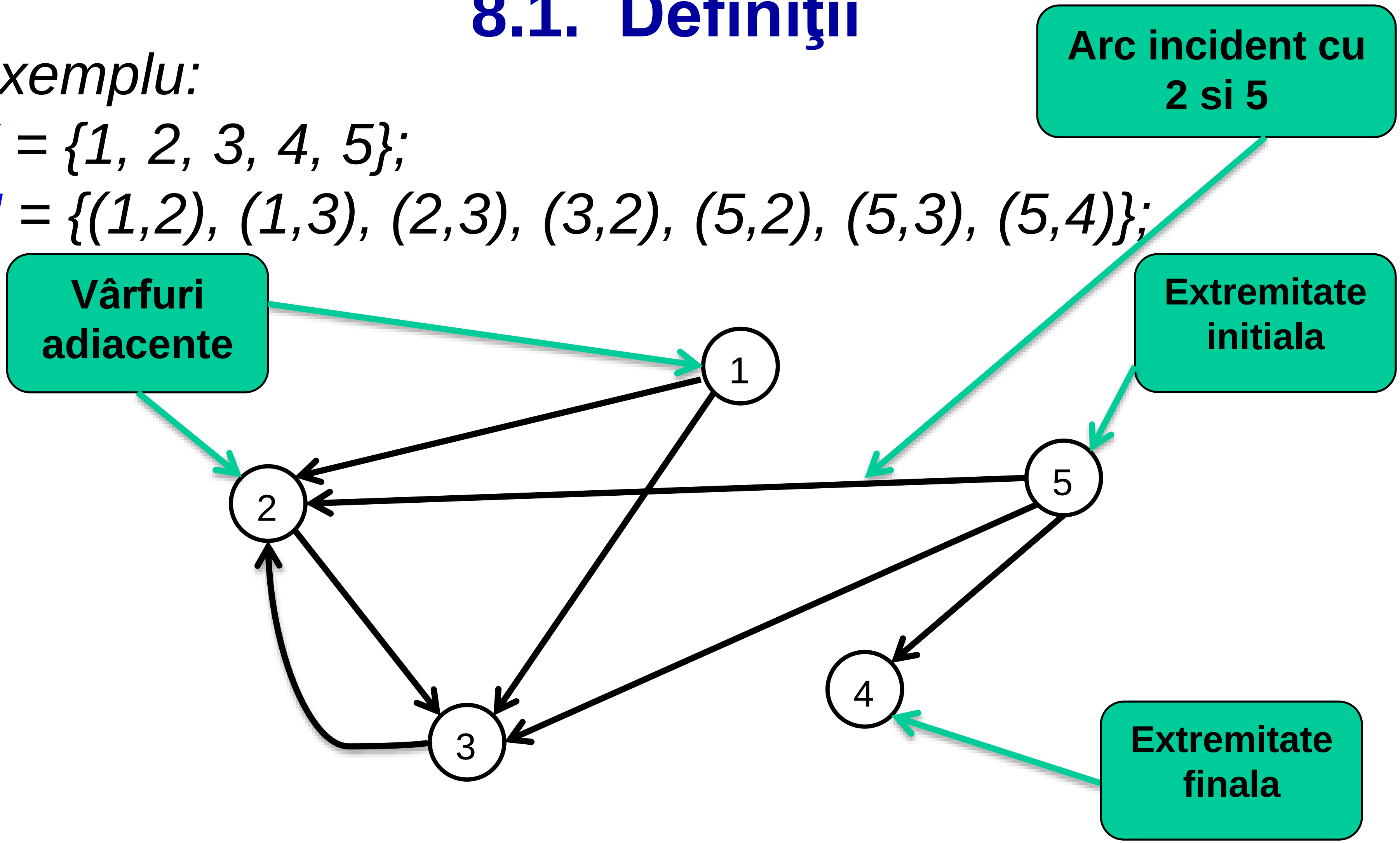
Arcul **(x,y)** diferă de arcul **(y,x)**.

8.1. Definiţii

Exemplu:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$U = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (5,2), (5,3), (5,4)\}$;



8.1. Definiţii

Definitie Se numeşte **grad exterior** al unui vârf x notat cu $d^+(x)$, *numărul arcelor de forma* $(x,y) \in U$.

Definitie Se numeşte **grad interior** al unui vârf x notat cu $d^-(x)$, *numărul arcelor de forma* $(y,x) \in U$.

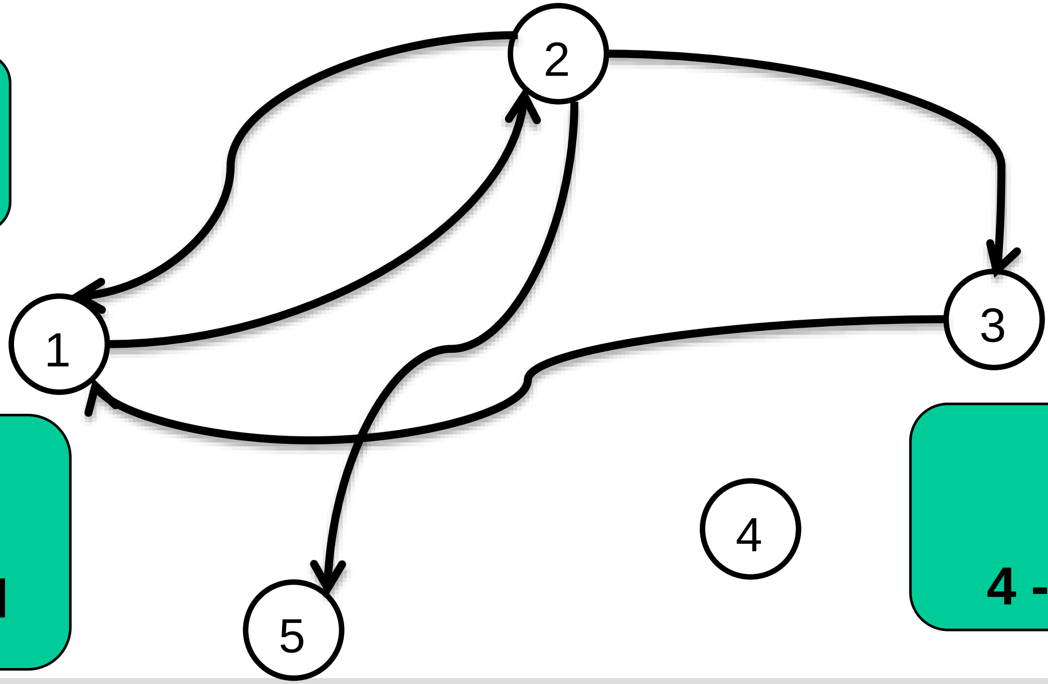
8.1. Definiţii

Exemplu:

X *= {1, 2, 3, 4, 5};*

U *= {(1,2), (2,1), (2,3), (3,1), (2,5)};*

$d^+(2)=3$
$d^-(2)=1$



$d^+(5)=0$
$d^-(5)=1$
5 - Nod terminal

$d^+(4)=0$
$d^-(4)=0$
4 - Nod izolat

Notatie

$\Gamma^+(x)=\{y \in X | (x,y) \in U\}$ - mulţimea succesorilor lui x

Notatie

$\Gamma^-(x)=\{y \in X | (y,x) \in U\}$ - mulţimea predecesorilor lui x

Notatie

$\omega^+(x)=\{u=(x,y) | u \in U\}$ – mulţimea arcelor ce ies din x

Notatie

$\omega^-(x)=\{u=(y,x) | u \in U\}$ – mulţimea arcelor ce intră in x

<u>Observatie:</u> Un vârf este izolat dacă are gradul interior şi gradul exterior egale cu 0.

<u>Observatie:</u> Un vârf se numeşte terminal dacă are gradul interior 1 şi gradul exterior 0.

Definitie Se numeşte **lant** o succesiune de arce u_1, u_2 ... $u_k \in U$, cu proprietatea ca oricare doua arce (u_k, u_{k+1}) de pe pozitii consecutive au un nod comun.

Observaţie: nu contează ordinea de parcurgere

Definitie Se numeşte **drum** o succesiune de noduri x_1, x_2 ... $x_k \in X$ cu proprietatea că (x_i, x_{i+1}) este arc.

Observaţie: contează ordinea de parcurgere

Dacă nodurile sunt distincte, drumul se numeşte elementar.

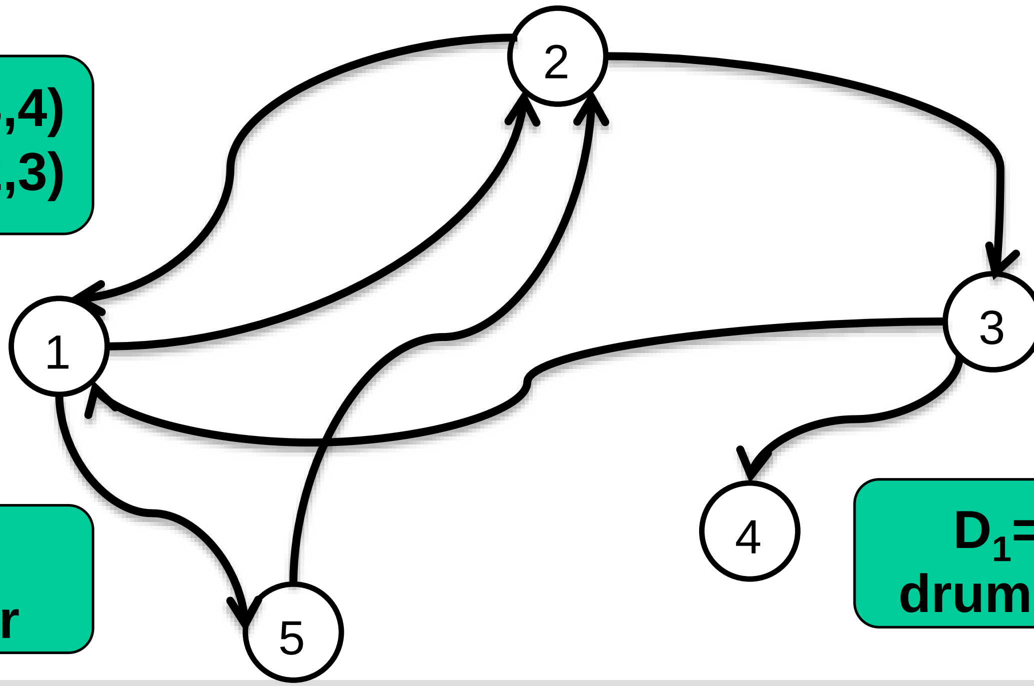
8.1. Definiţii

Exemplu:

$\boldsymbol{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\};$

$\boldsymbol{U} = \{(1,2), (2,1), (1,5), (2,3), (3,1), (3,4), (5,2)\};$

L_1= (1,2), (2,3),(3,4)
L_2= (1,5), (5,2),(2,3)



D_2= {1,2,3,4}
drum elementar

D_1= {1,2,3,1,2}
drum neelementar

<u>Definitie</u> Se numeşte **circuit** într-un graf orientat un drum $x_1, x_2 \ldots x_k$ cu proprietatea că $x_1 = x_k$ şi arcele (x_i, x_{i+1}) să fie distincte 2 câte 2.

<u>Definitie</u> Un circuit în care toate nodurile sunt distincte cu excepţia capetelor se numeşte **circuit elementar**.

<u>Definitie</u> Un **drum hamiltonian** într-un graf orientat este un drum care conţine toate vârfurile grafului.

<u>Definitie</u> Intr-un graf orientat G=(X,U) se numeşte **circuit hamiltonian** un circuit elementar care conţine toate vârfurile grafului.

<u>Definitie</u> Intr-un graf orientat G=(X,U) se numeşte **circuit eulerian** un circuit care conţine toate arcele grafului.

<u>Definitie</u> Se numeşte **graf eulerian** un graf care conţine un circuit eulerian.

8.1. Definiţii

Definitie Un **graf parţial** al grafului orientat $G=(X,U)$ este un graf $G_1=(X,V)$ cu proprietatea că $V \subseteq U$ (este graful însuşi sau se obţine din graful iniţial prin eliminarea unor arce).

Se mai spune că graful parţial G_1 este indus de mulţimea de arce V.

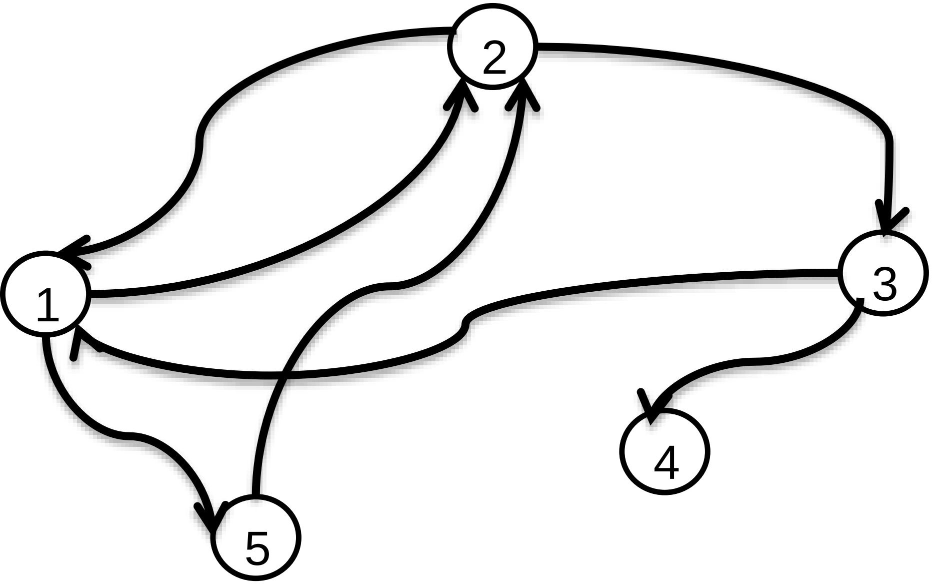
8.1. Definiţii

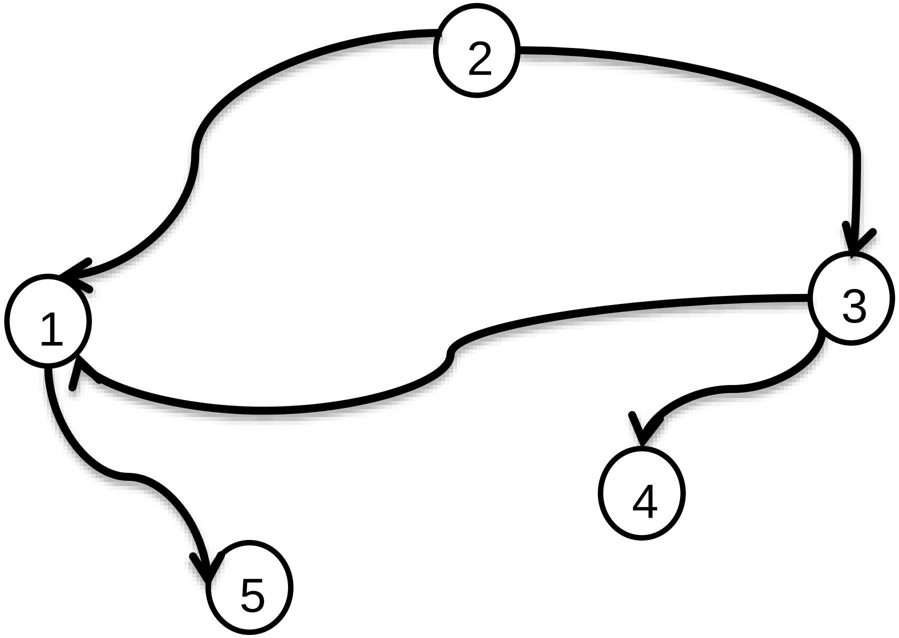
Exemplu:

X *= {1, 2, 3, 4, 5};*

U *= {(1,2), (2,1), (1,5), (2,3), (3,1), (3,4), (5,2)};*

V *= {(2,1), (1,5), (3,1), (3,4), (2,3)};*





8.1. Definiţii

Definitie Un **subgraf** al unui graf orientat G=(X,U) este un graf H=(Y,V) astfel incât $Y \subseteq X$ şi V conţine toate arcele din U care au ambele extremităţi în Y (poate fi graful însuşi sau se obţine din acesta prin eliminarea unor vârfuri şi a arcelor incidente cu acestea).

Spunem că subgraful H este indus de mulţimea de vârfuri Y.

8.1. Definiţii

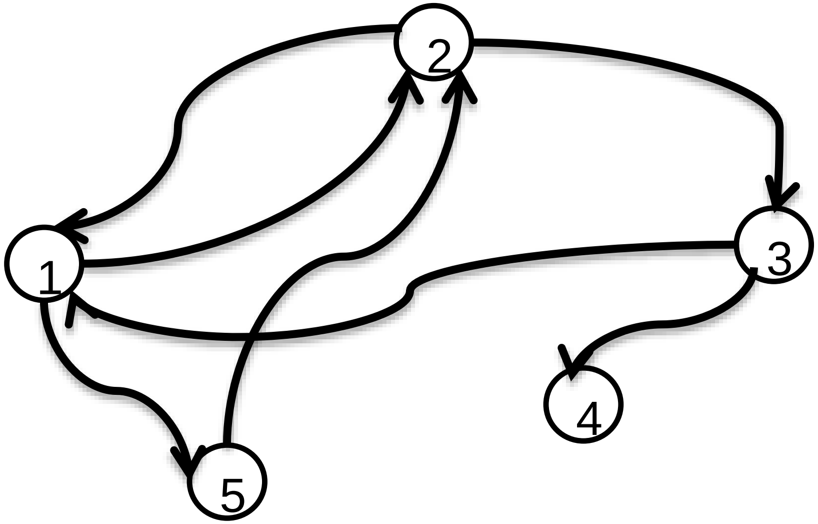
Exemplu:

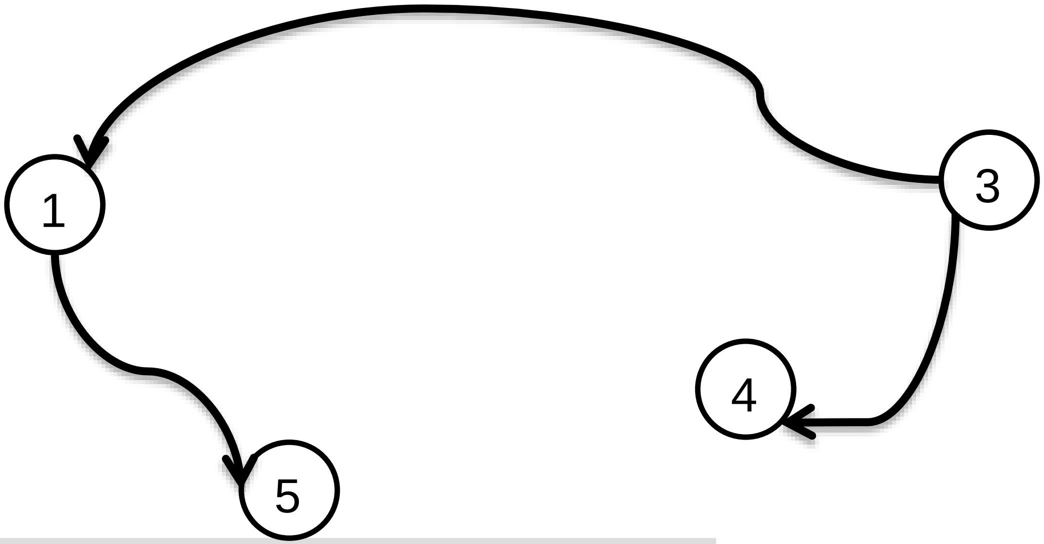
X = *{1, 2, 3, 4, 5};*

U = *{(1,2), (2,1), (1,5), (2,3), (3,1), (3,4), (5,2)};*

Y = *{1, 3, 4, 5};*

V = *{(1,5), (3,1), (3,4)};*





Definitie Un graf orientat este **complet** dacă oricare două vârfuri distincte ale sale sunt adiacente.

Observatii:

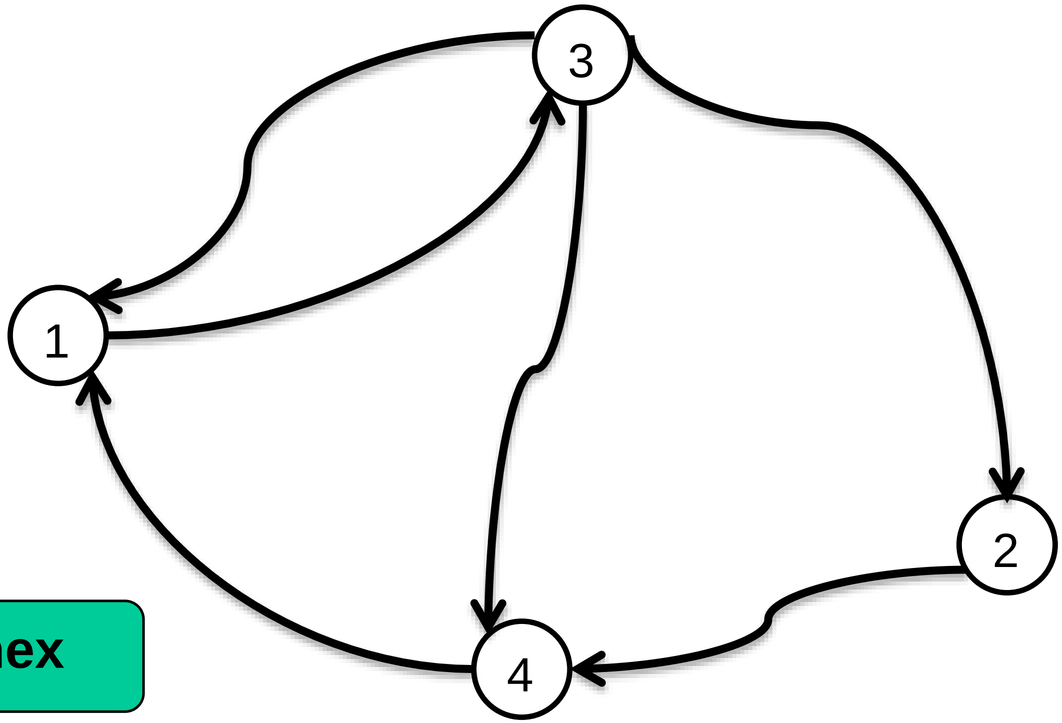
- Spre deosebire de grafurile neorientate unde graful complet este unic, la grafurile orientate se pot construi mai multe grafuri orientate complete cu n vârfuri.
- Două vârfuri x şi y sunt adiacente într-un graf orientat în oricare din situaţiile: există arcul (x,y) sau arcul (y,x) sau arcele (x,y) şi (y,x).
- *Sunt n(n-1)/2 posibilităţi de a alege două vârfuri distincte.*
- *Pentru fiecare dintre acestea există 3 situaţii, deci în total sunt $3^{n(n-1)/2}$ grafuri orientate complete cu n vârfuri.*

Definitie Un graf este **tare conex** dacă pentru oricare două vârfuri x, y $\in$ X **există un drum de la x la y şi un drum de la y la x**.

Definitie O **componentă tare conexă** a unui graf orientat G=(X, U) este un subgraf $G_1=(X_1,Y_1)$ al lui G care este tare conex şi care este maximal în raport cu această proprietate (adică oricare ar fi $x \in X \setminus X_1$, subgraful lui G generat de $X_1 \cup \{x\}$ nu mai este tare conex).

8.1. Definiţii

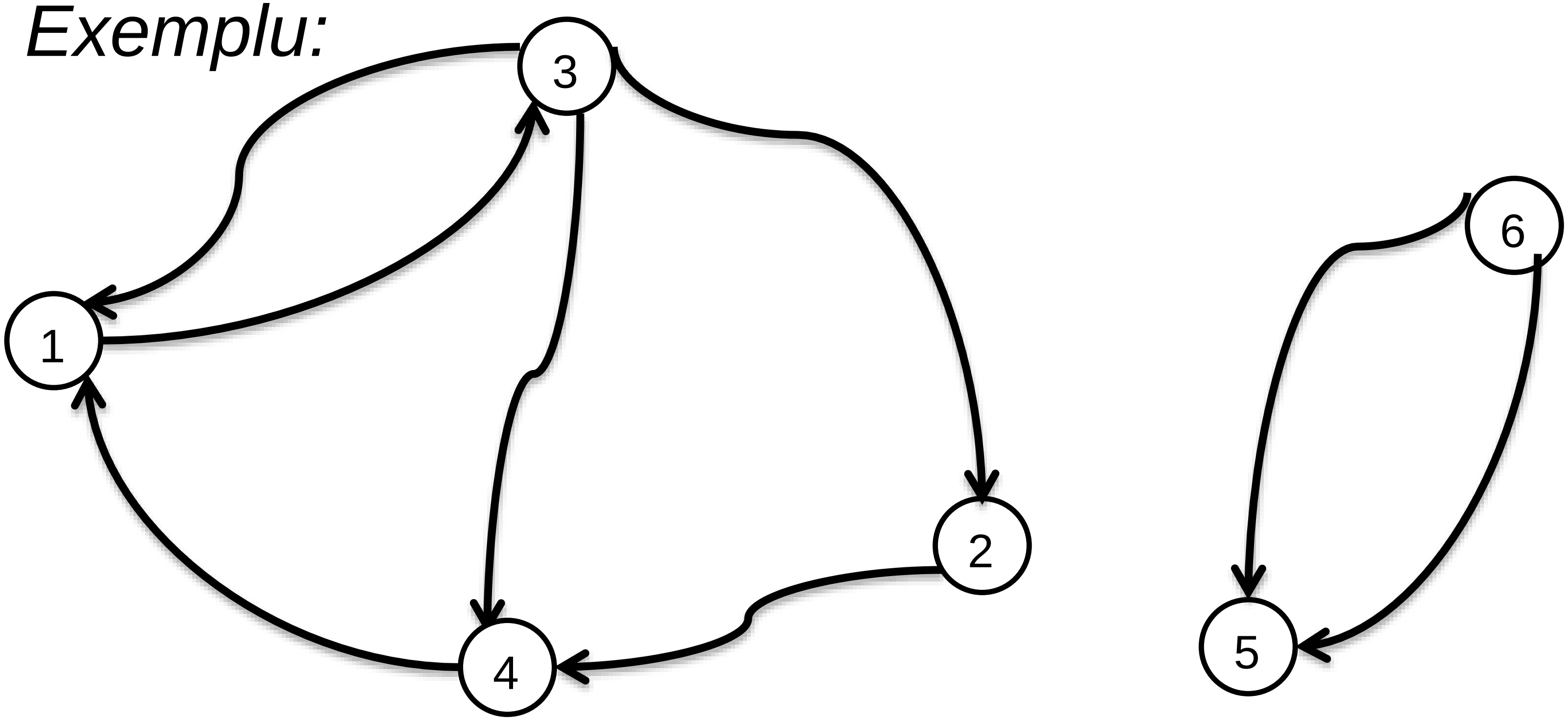
Exemplu:



Graf tare conex

8.1. Definiţii

Exemplu:



Graf cu 2 componente tare conexe

Definitie Fiecărei muchii a unui graf orientat i se poate asocia o valoare care reprezintă **costul** acelei muchii.

Definitie Un graf orientat în care fiecărei muchii i s-a asociat o valoare se numeşte **graf ponderat** sau **graf valoric**.

Definitie Fie un graf orientat G=(X, U) şi o funcţie L: $U \rightarrow R_{+}$, care asociază fiecărui arc $u \in U$ lungimea (costul sau ponderea) sa L(u).
Lungimea unui drum în acest graf este egală, prin definiţie cu suma lungimilor asociate arcelor sale.

<u>Definitie</u> Un graf orientat cu proprietatea că între oricare două vârfuri x şi y există un arc şi numai unul se numeşte **graf turneu**.

<u>Definitie</u> Numim **transpusul** unui graf orientat G=(X, U) un graf G'=(X, U') care are aceeaşi mulţime de vârfuri ca şi graful iniţial, arcele sale fiind cele ale grafului iniţial dar având sens opus.

Conţinutul cursului

8.1. Grafuri orientate. Definiții

8.2. Reprezentarea grafurilor orientate

8.3. Parcurgerea grafurilor orientate

8.4. Probleme rezolvate

8.5. Subiecte tip grilă

8.2 Reprezentari ale grafurilor orientate

Există mai multe moduri de reprezentare a grafurilor, alegerea făcându-se în funcţie de tipurile de operaţii care urmează să se efectueze:

1. **Matricea de adiacenţă**: face o asociere între vârfuri şi indicii matricei. Este o matrice pătratică cu nxn elemente, unde n este numărul de noduri.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă arcul } (i,j) \text{ există} \\ 0, \text{ dacă arcul } (i,j) \text{ nu există} \end{cases}$$

8.2 Reprezentari ale grafurilor orientate

Observatie

Matricea de adiacenţă a unui graf orientat nu este simetrică faţă de diagonala principală.

Observatie

Numarul de valori “1” de pe linia “i” reprezintă gradul exterior al nodului “i”.

Observatie

Numarul de valori “1” de pe coloana “i” reprezintă gradul interior al nodului “i”.

8.2 Reprezentari ale grafurilor orientate

2. **Matricea de incidenţă (matricea vârfuri-arce):** este o matrice cu n linii şi m coloane, unde n este numărul de vârfuri şi m este numărul de arce; pe linii se reţin vârfurile, pe coloane se reţin muchiile; matricea are valorile 0, 1 şi -1.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă i este extremitate iniţială a arcului j} \\ -1, \text{ dacă i este extremitate finală a arcului j} \\ 0, \text{ dacă i nu este extremitate a arcului j} \end{cases}$$

Observatie

- Completarea matricei se face coloană cu coloană. Pe fiecare coloană sunt două valori diferite de 0 (1 pentru vârful iniţial, -1 pentru vârful final) iar celelalte valori sunt 0.

Observatie

- Numarul de valori “1” de pe linia “i” reprezintă gradul exterior al nodului “i”.

Observatie

- Numarul de valori “-1” de pe linia “i” reprezintă gradul interior al nodului “i”.

3. **Matricea drumurilor**: este o matrice pătratică cu nXn noduri unde n este numărul de vârfuri

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ dacă drumul de la i la j există} \\ 0, \text{ dacă drumul de la i la j nu există} \end{cases}$$

Observatie

- Matricea drumurilor se obţine din matricea de adiacenţă prin aplicarea algoritmului lui Roy-Warshall.
- Se utilizează pentru a arăta dacă *un graf este tare conex* sau nu.
- *Dacă în matrice sunt numai valori de 1, inseamnă că graful este tare conex.*

8.2 Reprezentari ale grafurilor orientate

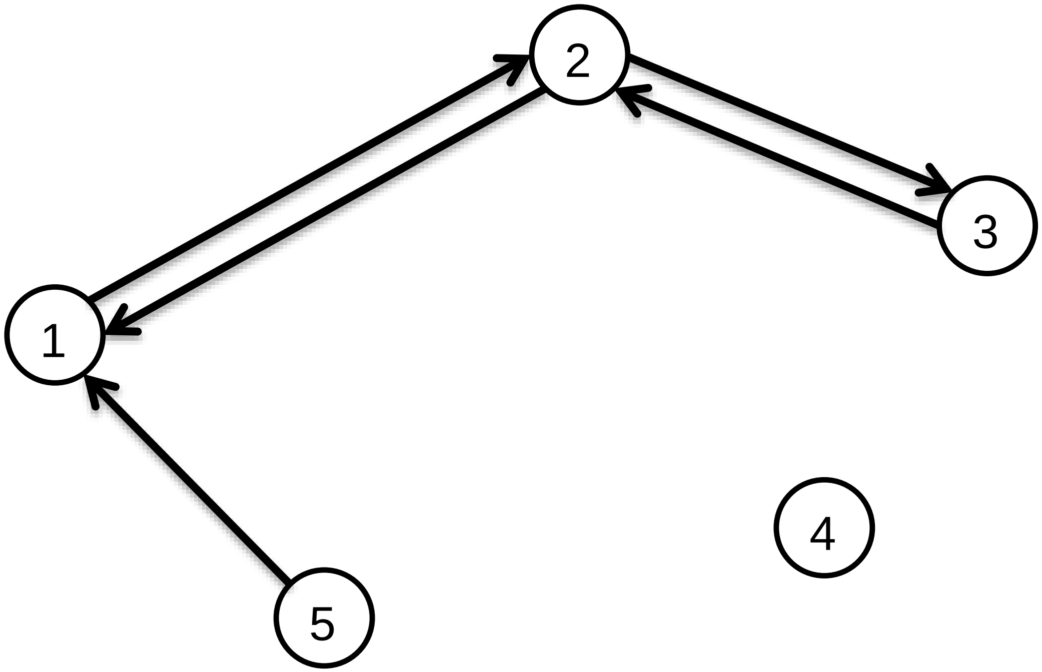
4. **Matricea costurilor**: pentru reprezentarea grafurilor valorice. Este o matrice cu nXn elemente, unde n este numărul de noduri.

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{costul arcului, dacă arcul } (i,j) \text{ există} \\ 0\text{, dacă arcul } (i,j) \text{ nu există} \\ \infty \,/\, -\infty\text{, dacă este o problemă de minim/maxim} \end{cases}$$

Observatie

- Matricea de costurilor unui graf orientat nu este simetrică faţă de diagonala principală.

5. ***Liste de adiacenţă***: Pentru fiecare nod se memorează o listă a vecinilor săi.
Pentru întregul graf este necesar un vector de liste (P) în care P_i este adresa primului element al listei asociate lui i.



Nod	Lista de adiacenţă asociată
1	2,5
2	1,3
3	2
4	-
5	1

Conţinutul cursului

8.1. Grafuri orientate. Definiții
8.2. Reprezentarea grafurilor orientate
8.3. Parcurgerea grafurilor orientate
8.4. Probleme rezolvate
8.5. Subiecte tip grilă

8.3. Parcurgerea grafurilor orientate

Prin algoritmul *BF* se realizeaza o parcurgere a grafului „*în lăţime*".

Se vizitează un vârf iniţial s, apoi vecinii săi (vârfurile adiacente cu s), după aceea vecinii vecinilor lui s (nevizitaţi încă), etc.

Observatie:

Dacă graful nu este conex nu se pot vizita toate vârfurile.

Structuri de date necesare pentru implementare sunt:

1. Matrice de adiacenţă (sau alte variante de reprezentare): **a**

2. Coada (în care se memorează în ordinea parcursă nodurile vizitate): **c**
   - p, u - indicatorii primului şi ultimului element din coadă

3. Vectorul nodurilor vizitate: **viz**
   - viz[i]=1, dacă i a fost vizitat
   - viz[i]=0, altfel

8.3. Parcurgerea grafurilor orientate

- Parcurgerea *BF(Breath First)* se efectuează prin utilizarea structurii numită coadă, având grijă ca un nod să fie vizitat o singură dată.
- Atunci când un nod a fost introdus în coadă, se marchează ca vizitat.

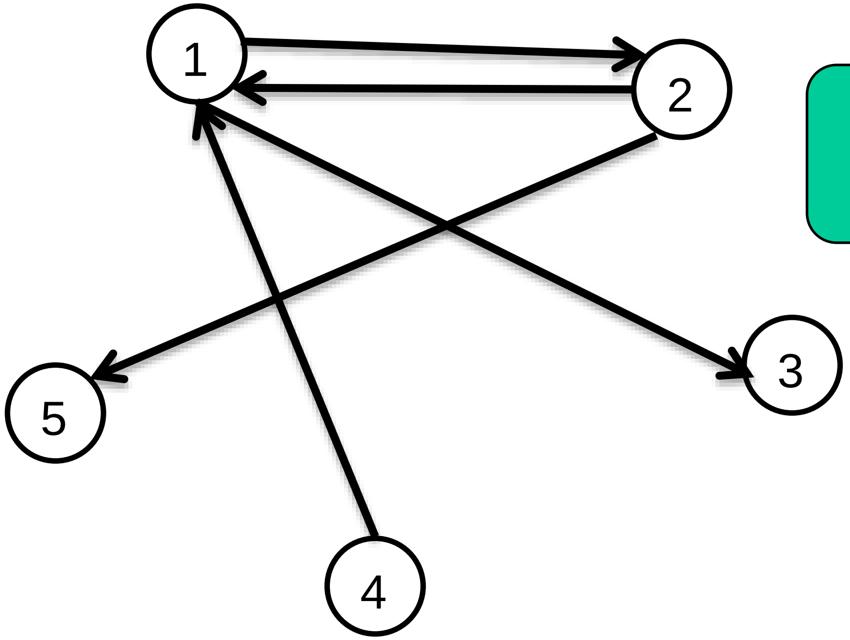
Observaţie: algoritmul se adaptează astfel încât să poată fi luaţi în considerare toţi vecinii unui nod.

8.3. Parcurgerea grafurilor orientate

Exemplu:

X *= {1, 2, 3, 4, 5};*

U *= {(1,2), (2,1), (1,3), (2,5), (4,1)};*



x = 1

Parcurgerea BF: 1, 2, 3, 4, 5

8.3. Parcurgerea grafurilor orientate

- Algoritmul *DF (Depth First)* se caracterizează prin faptul că realizează o parcurgere a grafului „*în adâncime*" atât cât este posibil.
- *Parcurgerea începe cu un vârf s ales inițial.*
- *Prelucrarea unui vârf conduce la prelucrarea primului său vecin încă nevizitat, apoi se prelucrează primul vecin al acestuia care nu a fost încă vizitat, etc.*

8.3. Parcurgerea grafurilor orientate

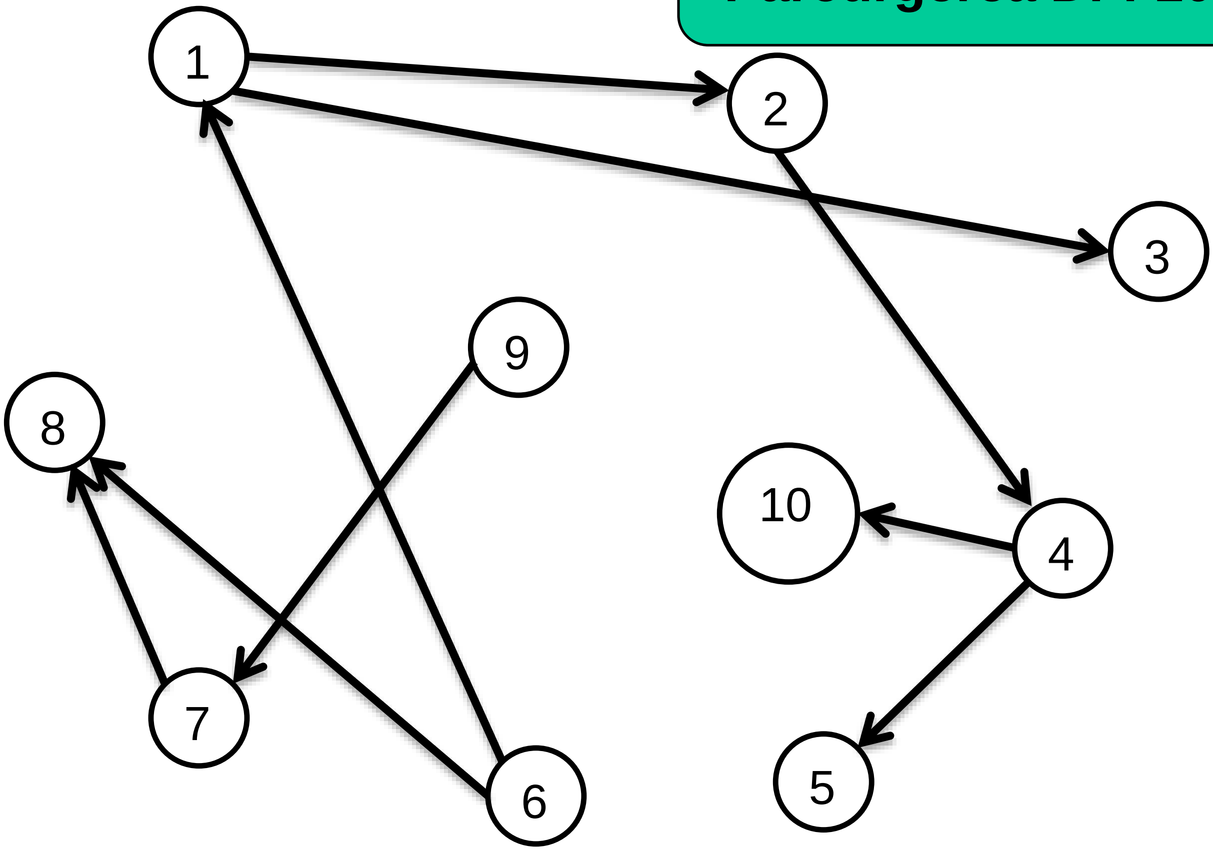
Structuri de date necesare implementării:

1. Matrice de adiacenţă (sau alte variante): **a**
2. Stiva: **s** (în care se memorează nodurile în ordinea parcurgerii). Dacă se implementează varianta recursivă, se va folosi stiva procesorului
3. Vectorul nodurilor vizitate: **viz**

8.3. Parcurgerea grafurilor orientate

Exemplu:

x = 10
Parcurgerea DF: 10, 4, 2, 1, 3, 6, 8, 7, 9, 5



Conţinutul cursului

8.1. Grafuri orientate. Definiții

8.2. Reprezentarea grafurilor orientate

8.3. Parcurgerea grafurilor orientate

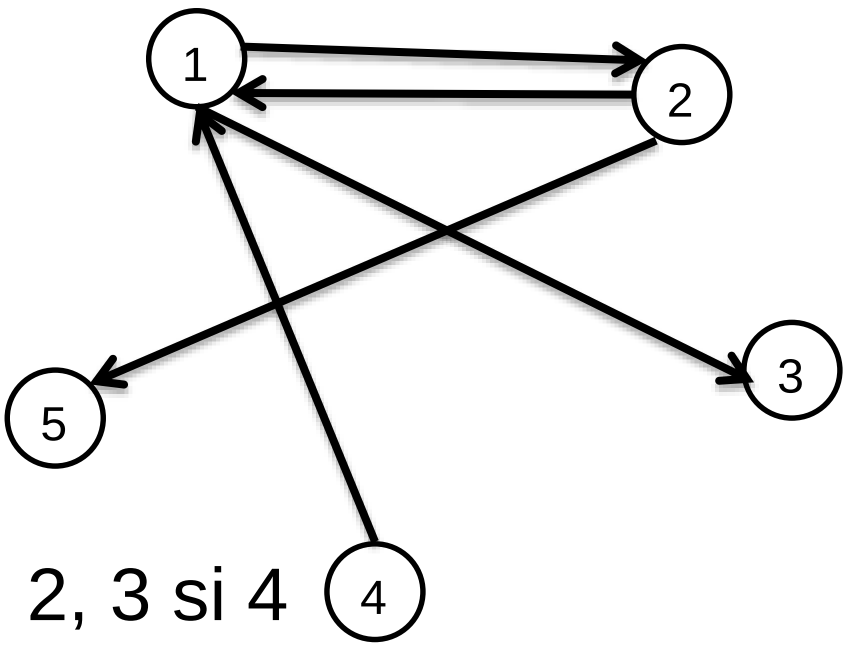
8.4. Probleme rezolvate

8.5. Subiecte tip grilă

8.4. Probleme rezolvate

Problema 1:

Determinati vecinii unui varf al unui graf orientat.



Exemplu:

Pentru varful 1, vecinii sunt: 2, 3 si 4

8.4. Probleme rezolvate

```
# include <iostream.h>
int main(void)
{
  int n, a[50][50],i,j,x,v[50],k;
  cout<<"Dati nr. de varfuri ale grafului orientat n = ";
  cin>>n;
  for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=n;j++){
                  cout<<"a["<<i<<“]["<<j<<"]=";
                  cin>>a[i][j];
          }
```

8.4. Probleme rezolvate

```
cout<<"\n graful citit are "<<n<<" noduri! ";
cout<<"\n matricea sa de adiacenta este:\n";
for(i=1;i<=n;i++)
  {
    for(j=1;j<=n;j++) cout<<" "<<a[i][j];
    cout<<"\n";
  }
cout<<"Dati varful ai carui vecini doriti sa-i
aflati: ";
cin>>x;
```

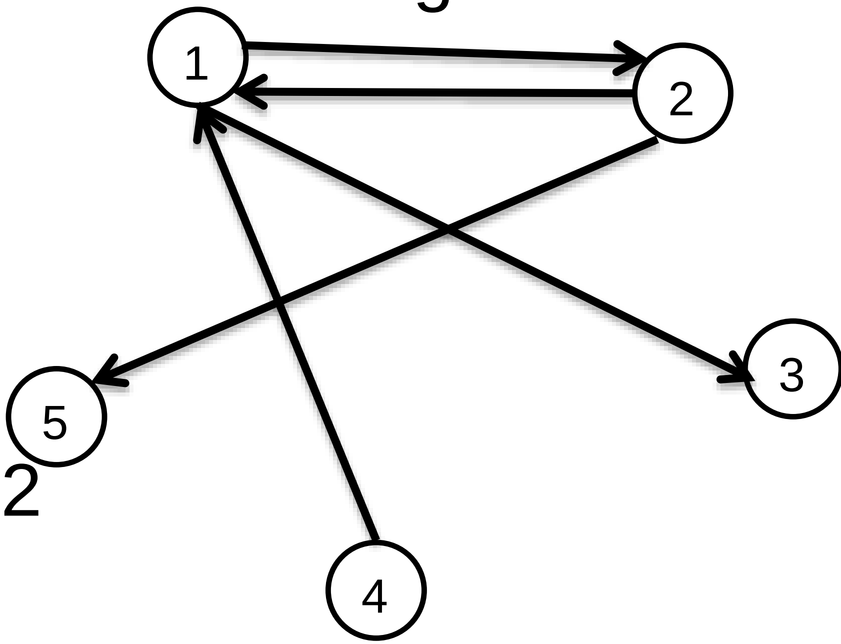
8.4. Probleme rezolvate

```
k=0;
for(i=1;i<=n;i++)
 if (a[i][x]==1 || a[x][i]==1)
   {
      k++;
      v[k]=i;
   }
cout<<"\n vecinii lui "<<x<<" sunt : ";
for(i=1;i<=k;i++)  cout<<" "<<v[i];
}
```

8.4. Probleme rezolvate

Problema 2:

Determinati gradele exterioare si interioare ale varfurilor unui graf, gradul exterior minim, gradul exterior maxim, gradul interior minim si gradul interior maxim.



Exemplu:

Pentru varful 1:

$d^+(1)= 2$, $d^-(1)= 2$

min $d^+(3,5)= 0$, max $d^+(1,2)= 2$

min $d^-(4)= 0$, max $d^-(1)= 2$

8.4. Probleme rezolvate

```
# include <iostream.h>

int minim(int v[50], int n)
{
  int i, min=v[1];
  for(i=2; i<=n; i++)
        if(v[i] < min) min=v[i];
  return min;
}
```

8.4. Probleme rezolvate

```
int maxim(int v[50],int n)
{
  int i, max=v[1];
  for(i=2; i<=n; i++)
     if (v[i] > max) max=v[i];
  return max;
}
```

8.4. Probleme rezolvate

```
int main(void)
{
  int n, a[50][50],i,j,x, grad_e[50], grad_i[50];
  cout<<"Dati nr. de varfuri ale grafului orientat
n = ";
  cin>>n;
  for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=n;j++){
                cout<<"a["<<i<<"]["<<j<<"]=";
                cin>>a[i][j];
         }
```

8.4. Probleme rezolvate

```
cout<<"\n graful citit are "<<n<<" noduri!";
cout<<"\n matricea sa de adiacenta este: \n";
for(i=1;i<=n;i++)
  {
    for(j=1;j<=n;j++)
       cout<<" "<<a[i][j];
    cout<<"\n";
  }
```

8.4. Probleme rezolvate

```
for(i=1;i<=n;i++)
{
        grad_e[i]=0;      grad_i[i]=0;
}
 for(i=1;i<=n;i++)
   for(j=1;j<=n;j++)
        if (a[i][j]==1) grad_e[i]++;
 for(i=1;i<=n;i++)
   for(j=1;j<=n;j++)
        if(a[j][i]==1) grad_i[i]++;
```

8.4. Probleme rezolvate

```
for(i=1;i<=n;i++){
      cout<<"\n pentru varful : "<<i;
      cout<<"\n grad exterior = "<<grad_e[i];
      cout<<"\n grad interior = "<<grad_i[i];
   }
 cout<<"\n gradul exterior minim este " << minim(grad_e,n);
 cout<<"\n gradul exterior maxim este " << maxim(grad_e,n);
 cout<<"\n gradul interior minim este " << minim(grad_i,n);
 cout<<"\n gradul interior maxim este " << maxim(grad_i,n);
}
```

Conţinutul cursului

8.1. Grafuri orientate. Definiții
8.2. Reprezentarea grafurilor orientate
8.3. Parcurgerea grafurilor orientate
8.4. Probleme rezolvate
8.5. Subiecte tip grilă

8.5. Subiecte tip grila

1. Graful neorientat cu 60 de noduri, numerotate de la 1 la 60, are numai muchiile [1,60], [60,20], [20,30] si [4,3]. Numarul componentelor conexe ale grafului este egal cu:

a) 3 b) 56 c) 54 d) 0

Raspuns: b) 56

Avem 4 muchii intre 6 noduri formand 2 componente conexe.

Din 60 scadem cele 6 noduri si raman 54 de noduri izolate → adica 54 de componente conexe

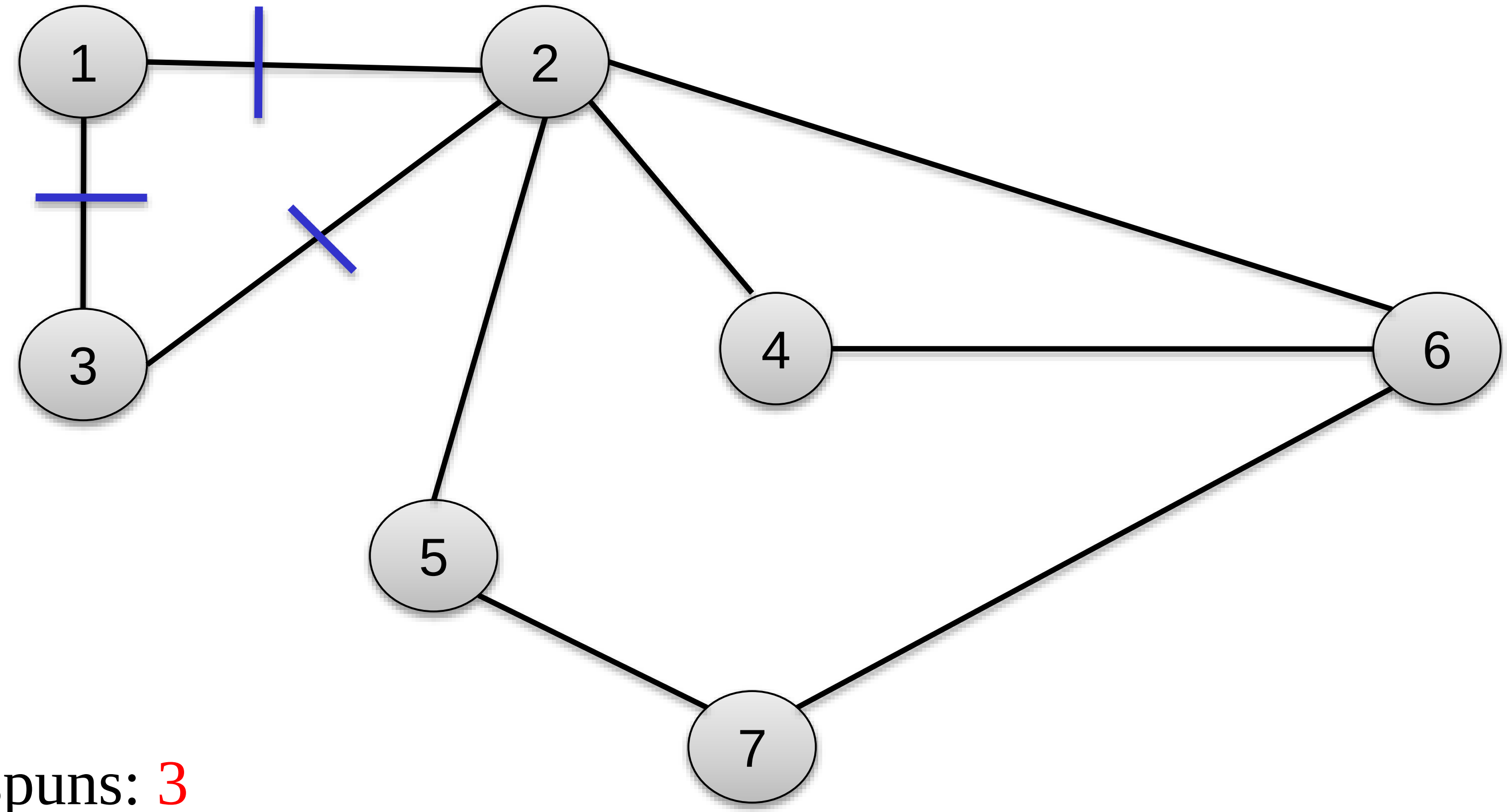
Deci sunt 54 + 2 = 56 componente conexe

8.5. Subiecte tip grila

2. Se considera graful neorientat cu 7 noduri numerotate de la 1 la 7 si muchiile [1,2], [1,3], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6], [4,6], [5,7], [6,7].

Care este numarul minim de muchii care trebuie eliminate pentru ca acest graf sa contina 3 componente conexe?

8.5. Subiecte tip grila



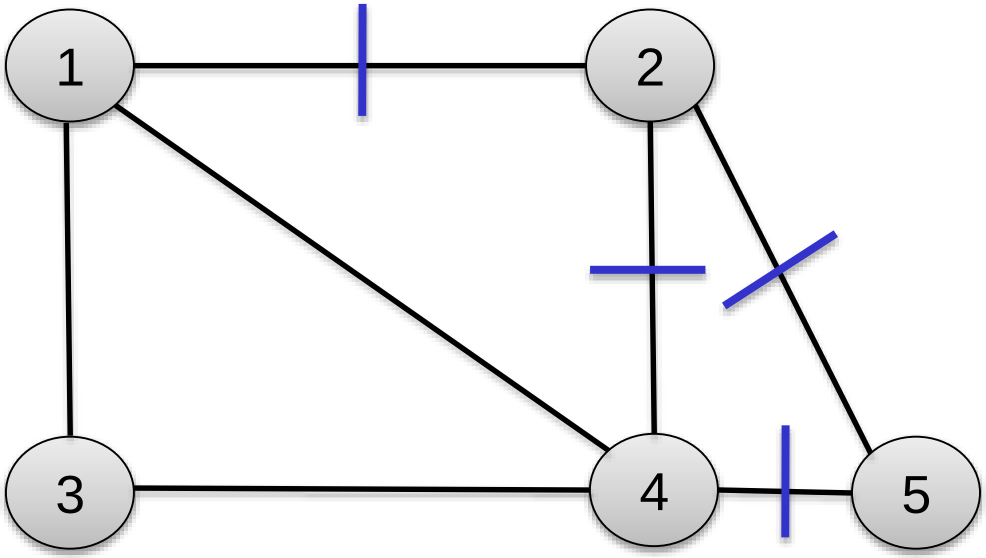
Raspuns: 3

Raman 2 noduri izolate(1 si 3) si o componenta conexa (2,4,5,6,7) → 3 componente conexe

8.5. Subiecte tip grila

3. Se considera graful neorientat din figura alaturata. Care este numarul minim de muchii ce se pot elimina astfel incat graful partial obtinut sa aiba exact 3 componente conexe?

a) 2   b) 4   c) 1   d) 3



Raspuns: b) 4

4 → raman 2 noduri izolate + 1 componenta conexa

→ 3 componente conexe

8.5. Subiecte tip grila

4. Care este numarul maxim de componente conexe pe care le poate avea un graf neorientat cu 20 de noduri si 12 muchii?

a) 6 b) 12 c) 10 d) 15

Raspuns: d) 15

Trebuie sa adaugam 12 muchii intre cat mai putine noduri.

Folosim formula: **n(n-1)/2**, n-numarul de noduri (formula ne ajuta sa aflam numarul muchiilor dintr-un graf neorientat complet)

6(6-1)/2=15→ intre 6 noduri putem adauga 15 muchii → avem 6 noduri care formeaza o componenta conexa si 14 noduri izolate

→ 1+14 = 15 componente conexe

8.5. Subiecte tip grila

5. Se considera graful orientat reprezentat prin listele de adiacenta alaturate. Cate noduri au gradul extern mai mare decat gradul intern?

a) 3
b) 2
c) 1
d) 4

Nod	Lista de adiacenţă asociată
1	2,6,5
2	3
3	1
4	6
5	6
6	2

8.5. Subiecte tip grila

6. Se considera un graf orientat cu 6 noduri care are urmatoarele proprietati:

- Suma gradelor externe ale tuturor varfurilor grafului este egala cu 6.
- Sunt numai 3 varfuri care au gradul intern egal cu 1

Care este valoarea maxima pe care o poate avea gradul extern al unui varf din graful dat?

8.5. Subiecte tip grila

7. Se considera graful orientat reprezentat prin matricea de adiacenta alaturata. Care este lungimea maxima a unui drum de la varful 4 pana la varful 6 format din varfuri distincte doua cate doua (lungimea unui drum este egala cu numarul de arce care compun acel drum)?

a) 4
b) 3
c) 1
d) 5

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.5. Subiecte tip grila

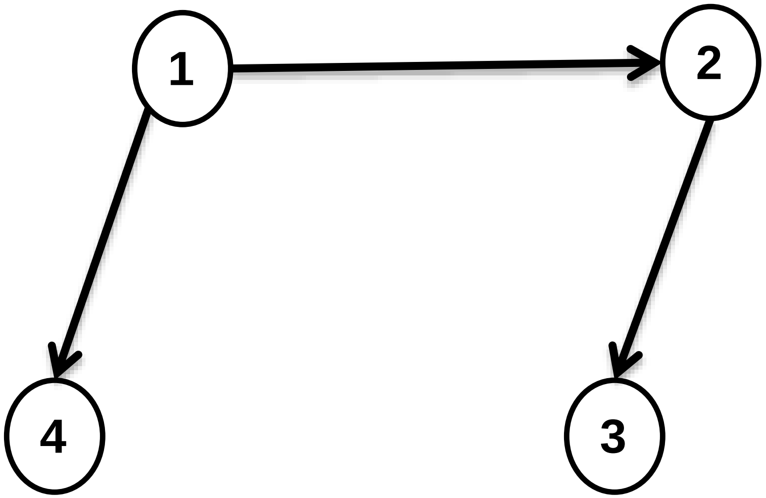
8. Un graf orientat este reprezentat prin matricea de adiacenta alaturata. Care dintre varfurile grafului au gradul exterior un numar impar?

a) 1,3,4,5
b) 2,3,4,5
c) 1,4,5,6
d) 2,3,5

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.5. Subiecte tip grila

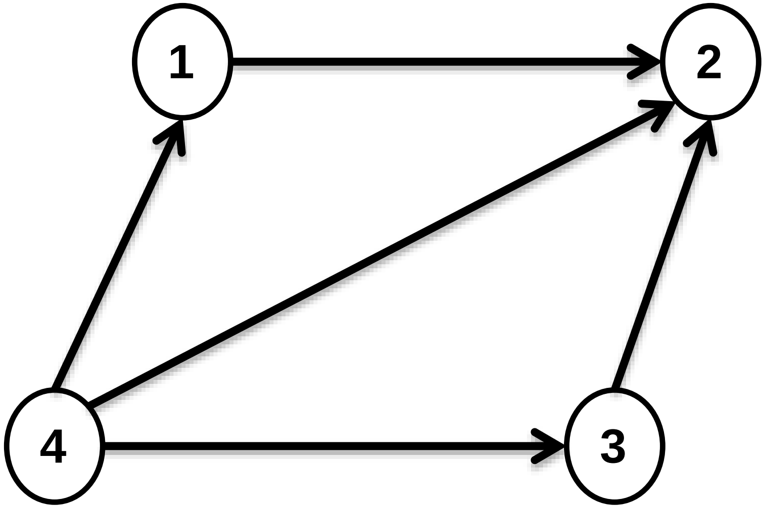
9. Se considera graful orientat din figura alaturata. Care este numarul minim de arce care trebuie adaugate si care sunt aceste arce, astfel incat oricare doua varfuri din graf sa fie unite prin drumuri elementare?



8.5. Subiecte tip grila

10. Care este numarul minim de arce care trebuie adaugate in graful orientat din figura laturata astfel incat fiecare varf sa apartina unui circuit?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4



Întrebări?