9

# PROIECTAREA ALGORITMILOR

Adrian Runceanu

Curs 9

# Arbori

# Conţinutul cursului

**9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor**

**9.2. Grafuri ponderate. Arborele partial de cost minim**

**9.2.1. Algoritmul lui Kruskal**

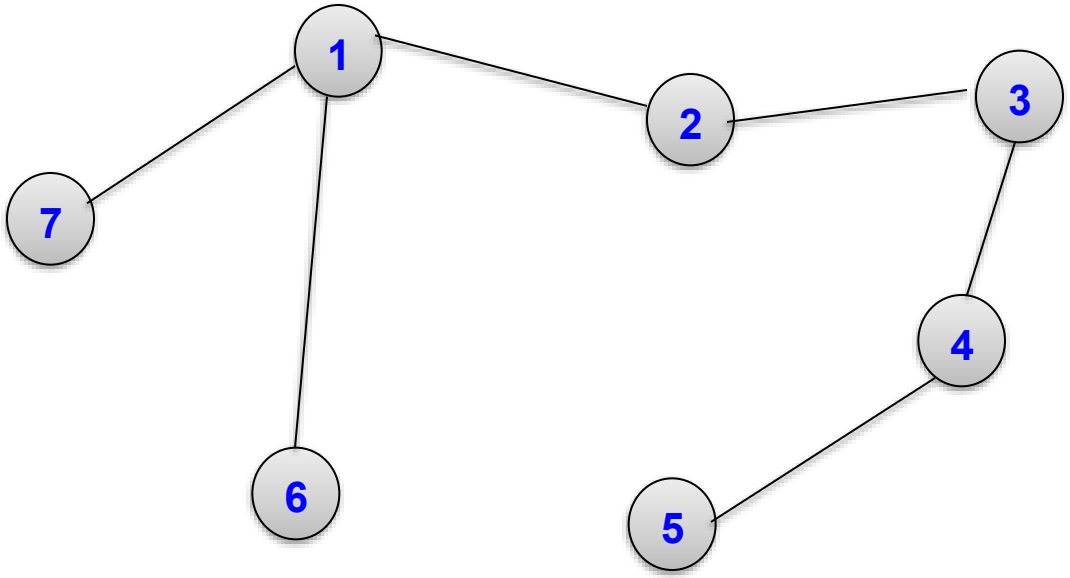
**9.2.2. Algoritmul lui Prim**

**9.3. Arbori binari. Definitii. Reprezentare. Metode de parcurgere**

***Definitie***

Se numeste **arbore** un graf conex si fara cicluri.

Exemplu:




Daca eliminam o muchie, graful isi pierde proprietatea de conexitate, iar daca adaugam o muchie, apare un ciclu.

# 9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor

**Teoremă.** Fie G un graf cu n≥1 vârfuri. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- *G este un arbore*
- *G are n-1 muchii şi nu conţine cicluri*
- *G are n-1 muchii şi este conex*
- *oricare două vârfuri din G sunt unite printr-un unic drum*
- *G nu conţine cicluri şi adăugarea unei noi muchii produce un unic ciclu elementar*
- *G este conex, dar devine neconex prin ştergerea oricărei muchii*

# 9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor

***Definitie***

Fie G un graf. Un graf partial H al sau care in plus este si arbore se numeste **arbore partial**.

Observatie:

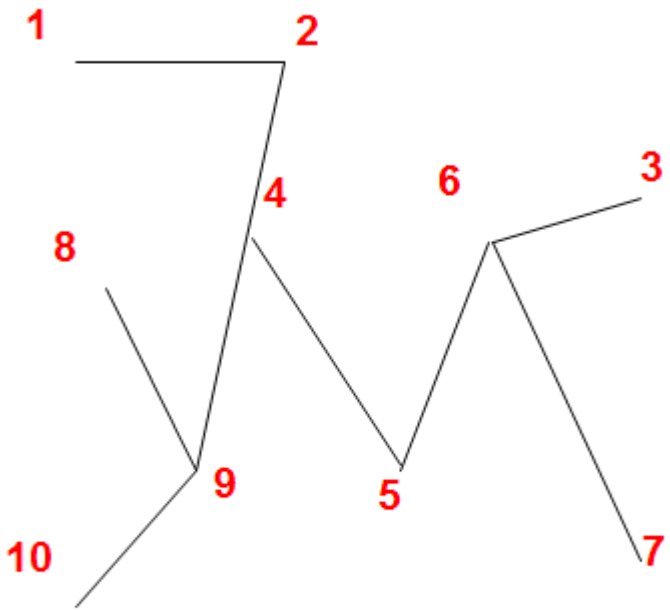
*Arborele poate fi considerat un graf orientat*, stabilind pe fiecare muchie sensul de la nivelul superior către nivelul inferior.

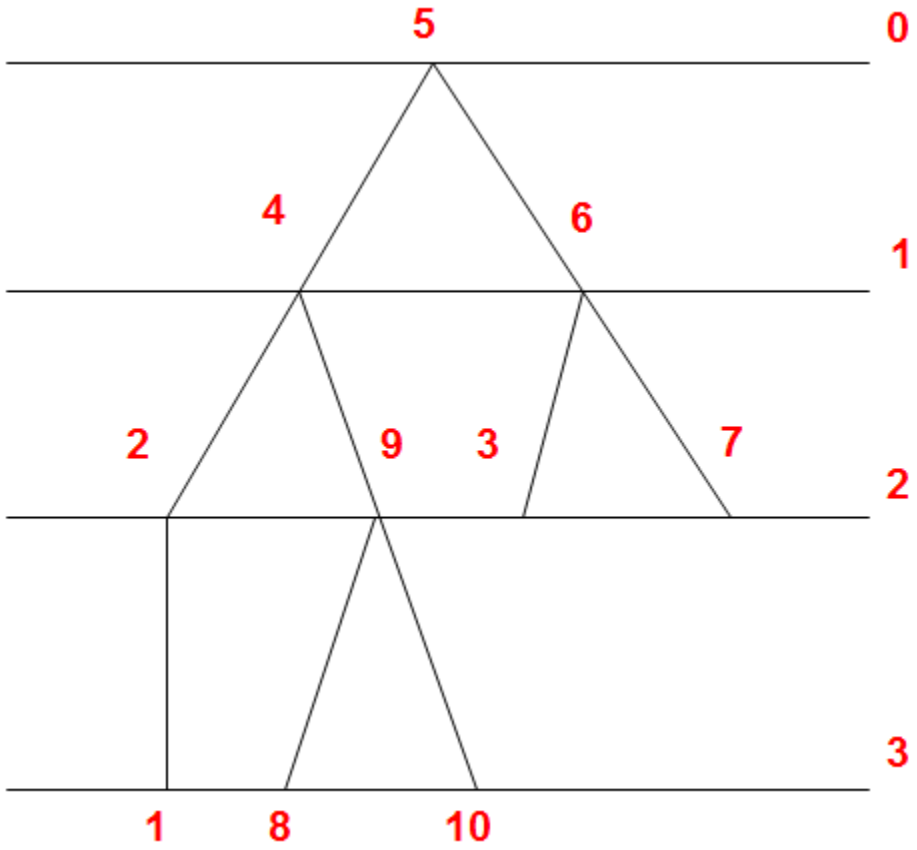
- În foarte multe probleme referitoare la arbori este pus în evidenţă un vârf al său, numit *rădăcină*.
- Alegerea unui vârf drept rădăcină are două consecinţe:

  *Arborele poate fi aşezat pe niveluri* astfel:
- rădăcina este aşezată pe nivelul 0
- pe fiecare nivel i sunt plasate vârfurile pentru care lungimea drumurilor care le leagă de rădăcină este i
- se trasează muchiile arborelui

  Această aşezare pe niveluri face mai intuitivă noţiunea de arbore, cu precizarea că în informatică *"arborii cresc în jos".*

# 9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor



# 9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor

***Definitie***

Daca intr-un arbore eliminam radacina, atunci obtinem **subarbori**.

***Definitie***

Intr-un arbore, succesorul unui nod se mai numeste si “**fiul**” sau “**urmasul**” sau.

# 9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor

***Definitie***

Daca un nod are unul sau mai multi fii, atunci el se numeste "**tatal**" sau "**parintele**" acestora.

***Definitie***

Daca un nod are mai multi fii, acestia se numesc "**frati**" intre ei.

# 9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor

***Definitie***

Se numeste **inaltimea arborelui** nivelul maxim al nodurilor unui arbore.

***Definitie***

Se numeste **gradul** unui nod numarul fiilor nodului respectiv.

***Definitie***

Se numeste **nod terminal(frunza)**, un nod de grad zero, iar un nod de grad diferit de zero se numeste **nod intern**.

# 9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor

***Definitie***

Se numeste **gradul arborelui**, gradul maxim al nodurilor unui arbore.

***Propozitie:***

Orice arbore H=(X,V) cu n>=2 varfuri contine cel putin doua varfuri terminale.

***Propozitie:***

Orice arbore cu n varfuri are n-1 muchii.

# 9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor

Aplicatie:

Se citeste un graf neorientat prin matricea de adiacenta. Se cere sa se verifice daca graful reprezinta un arbore.

Indicatie:

Aplicam teorema prezentata mai inainte.
(de exemplu: *verificam daca graful are n-1 muchii şi este conex*)

Codul sursa:

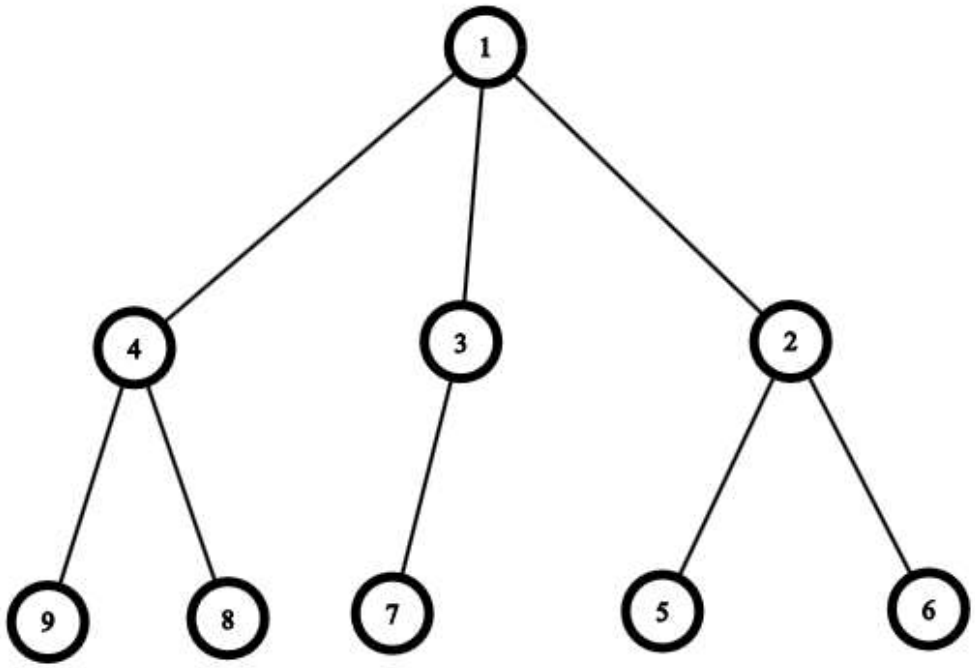
```
#include<iostream>
using namespace std;
int viz[30],n,i,j,k,u,v,p,a[20][20],c[30],m=0;
int main(void)
{
    //cout<<"Dati numarul de varfuri n = ";
    cin>>n;
    for(i=1; i<=n-1; i++)
      for(j=i+1; j<=n; j++)
      {
            //cout<<"a["<<i<<","<<j<<"]= ";
            cin>>a[i][j];
            a[j][i] = a[i][j];
            m+=a[i][j];                    // m = nr. de muchii
      }
    //cout<<"Dati varful de plecare ";
    cin>>i;
    for(j=1; j<=n; j++) viz[j]=0;
```

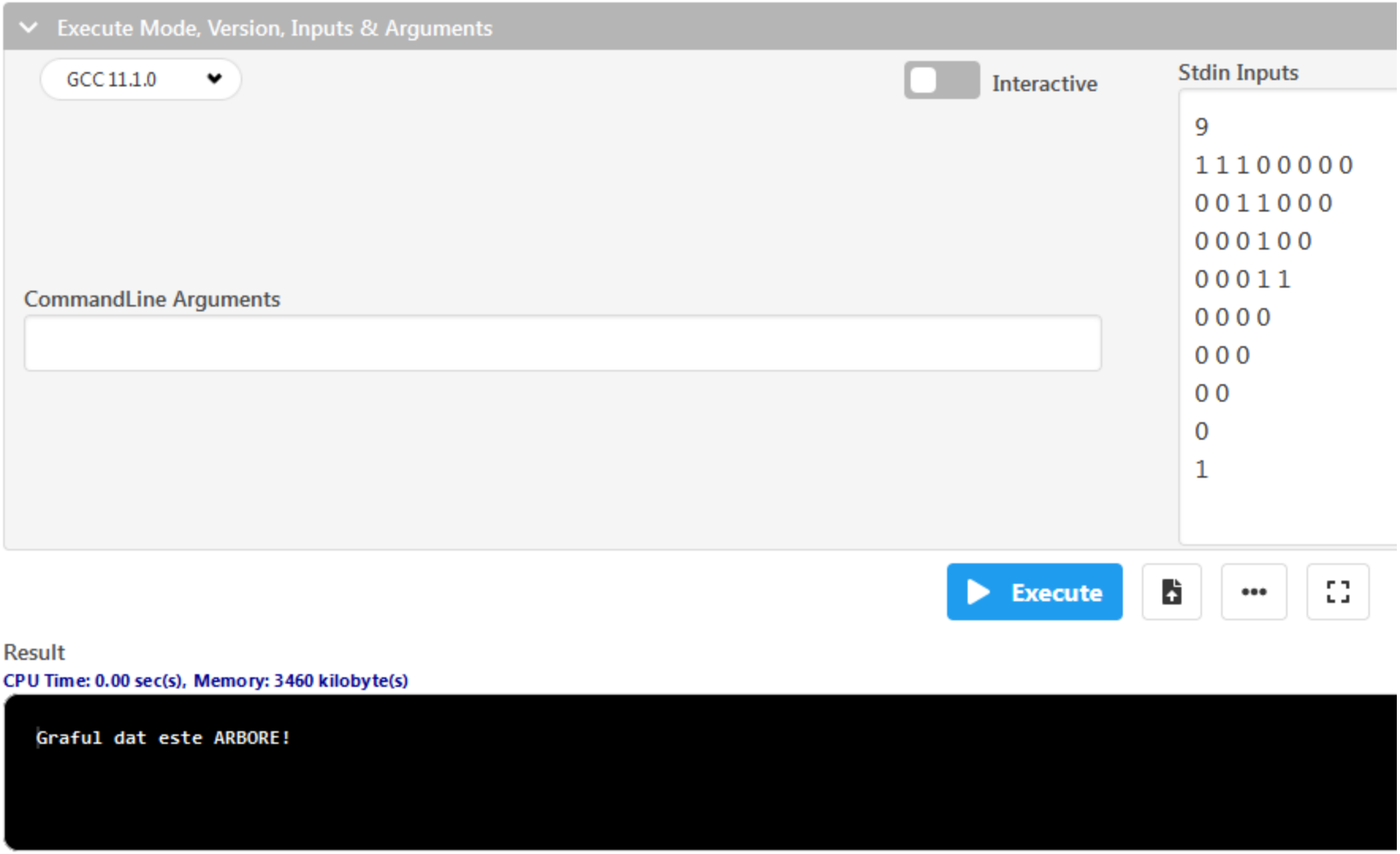
```
// parcurgem in latime graful neorientat
  c[1]=i;
  p=1;
  u=1;
  viz[i]=1;
  while(p<=u)
  {
       v=c[p];
       for(k=1; k<=n; k++)
       {
                 if( (a[v][k]==1) && (viz[k]==0) )
                 {
                           u++;
                           c[u]=k;
                           viz[k]=1;
                 }
       }
       p++;
  }
```

Dacă un graf este conex, atunci putem să vizităm (parcurgem) toate vârfurile sale pornind de la un vârf dat.

```
    int este_arbore=1;
    for(i=1;i<=n;i++)
          if(viz[i]==0) este_arbore=0;
    if(m==n-1 && este_arbore==1)
      cout<<"Graful dat este ARBORE!\n";
    else
      cout<<"Graful dat NU este ARBORE!\n";
}
```

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

int viz[30],n,i,j,k,u,v,p,a[20][20],c[30],m=0;
int main(void)
{
    //cout<<"Dati numarul de varfuri n = ";
    cin>>n;
    for(i=1; i<=n-1; i++)
      for(j=i+1; j<=n; j++)
      {
        //cout<<"a["<<i<<","<<j<<"]= ";
        cin>>a[i][j];
        a[j][i] = a[i][j];
        m += a[i][j];       // m = nr. de muchii
      }
    //cout<<"Dati varful de plecare ";
    cin>>i;
    for(j=1; j<=n; j++) viz[j]=0;
    // parcurgem in latime graful neorientat
      c[1] = i;
      p = 1;
      u = 1;
      viz[i] = 1;
      while(p <= u)
      {
        v = c[p];
        for(k = 1; k <= n; k++)
        {
            if( (a[v][k] == 1) && (viz[k] == 0) )
            {
                u++;
                c[u] = k;
                viz[k] = 1;
            }
        }
        p++;
      }
    int este_arbore = 1;
    for(i = 1; i <= n; i++)
        if(viz[i] == 0) este_arbore = 0;

    if(m == n - 1 && este_arbore == 1)  cout<<"Graful dat este ARBORE!\n";
    else    cout<<"Graful dat NU este ARBORE!\n";
    return 0;
}
```




Execute Mode, Version, Inputs & Arguments
GCC 11.1.0
Interactive
Stdin Inputs
9
1 1 1 0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 0
0 0 0 1 0 0
0 0 0 1 1
0 0 0 0
0 0 0
0 0
0
1
CommandLine Arguments
Execute
Result
CPU Time: 0.00 sec(s), Memory: 3460 kilobyte(s)
Graful dat este ARBORE!

# Conţinutul cursului

**9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor**

**9.2. Grafuri ponderate. Arborele partial de cost minim**

**9.2.1. Algoritmul lui Kruskal**

**9.2.2. Algoritmul lui Prim**

**9.3. Arbori binari. Definitii. Reprezentare. Metode de parcurgere**

# 9.2. Grafuri ponderate

Pentru rezolvarea problemelor practice cu ajutorul grafurilor, muchiilor(arcelor) li se asociaza **ponderi**:

- greutati
- costuri
- valori, etc

Astfel de grafuri se numesc **grafuri ponderate**.

# 9.2. Grafuri ponderate

Exemple de aplicatii:

1. Harta traseelor aeriene ale unei zone, unde arcele reprezinta rute de zbor, iar *ponderile reprezinta distante sau preturi*.
2. Circuite electrice, unde arcele reprezinta legaturi, iar *ponderile pot fi lungimi sau costuri*.
3. Intr-o activitate de planificare in executie a task-urilor, ponderea poate reprezenta fie timpul, fie costul executiei unui task, fie timpul de asteptare pana la lansarea in executie a task-ului.

# 9.2. Grafuri ponderate

Astfel se pot rezolva probleme legate de minimizare a costurilor:

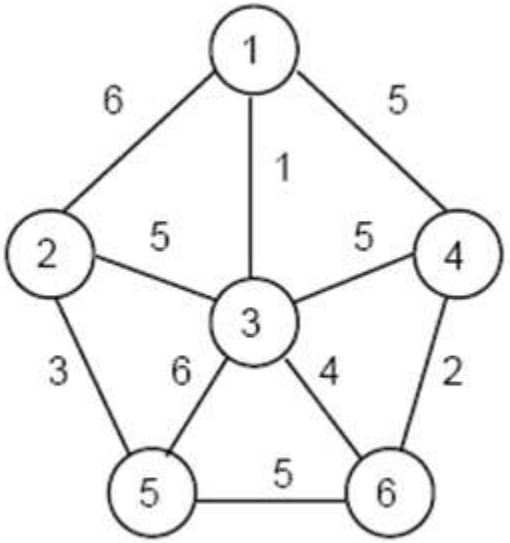
1) *Gasirea drumului minim cu costul cel mai redus care conecteaza toate nodurile grafului.*
2) *Gasirea drumului cu costul cel mai redus care leaga doua puncte date.*

Prima problema care modeleaza circuitele electrice, se numeste **problema arborelui de cost minim**.

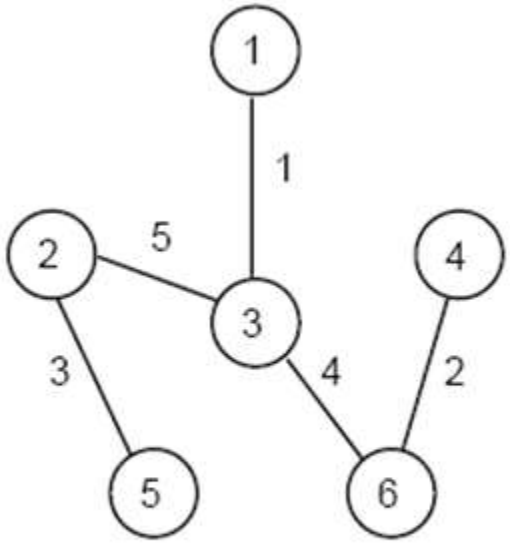
A doua problema care modeleaza harti de trasee(aeriene, feroviare, turistice) se numeste **problema drumului minim**.

# 9.2. Grafuri ponderate

Exemplu de reprezentare a unui
(a) graf ponderat (b) si a unui arbore de cost minim




(a)




(b)

# 9.2. Grafuri ponderate. Arborele partial de cost minim

**Arborele partial de cost minim** se poate determina cu ajutorul a trei algoritmi:

1) Algoritmul lui Kruskal

2) Algoritmul lui Prim

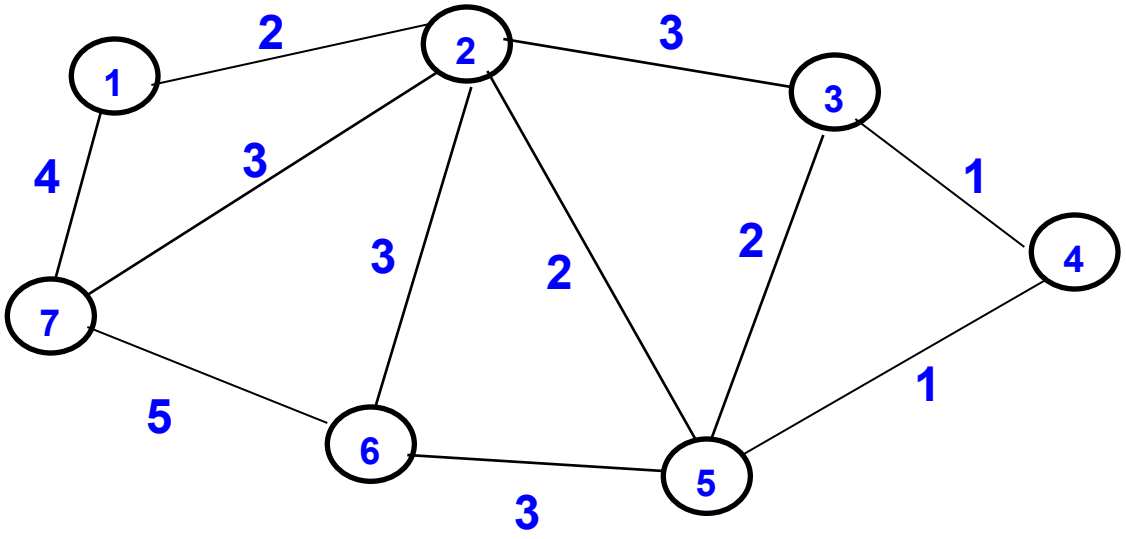
3) Metoda cautarii “bazate pe prioritate”

***Definitie***

Fie G=(X,U) un graf conex. Pentru graful partial H=(X,V) al lui G, **costul grafului** reprezinta suma costurilor muchiilor sale, adica:

$$c(H) = c(u_1) + c(u_2) + \ldots + c(u_m).$$

Exemplu: Fie graful G cu muchiile avand costurile urmatoare:




Pentru H=(X,V), cu V={[1,2], [3,5], [4,3], [6,7]}

c(H) = c([1,2]) + c([3,5]) + c(4,3) + c([6,7]) = 2 + 2 + 1 + 5 = 10

# 9.2. Grafuri ponderate. Arborele partial de cost minim

Problema:

Sa se determine un graf partial H al lui G care sa fie conex si sa aiba costul minim.

Notam **arborele partial de cost minim** cu **APM**.

Aceasta problema este cunoscuta sub numele de ***problema conectarii cu cost minim a oraselor***.

Proprozitie:

Pentru un graf G conex, exista un graf partial H conex si de cost minim, care in plus este si arbore.

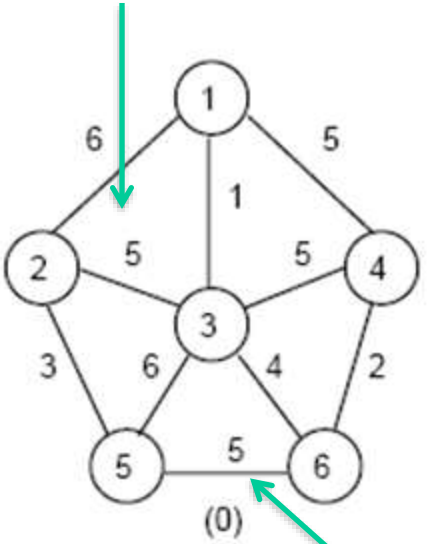
# Conţinutul cursului

## 1) Algoritmul lui Kruskal

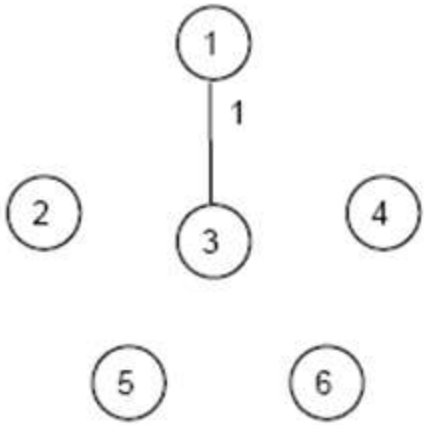
- Se pleaca initial de la n arbori distincti $H_1$, $H_2$,.., $H_n$, unde i = 1,…,n.
- La pasul k, unde k = 1,.., n - 2, avem n - k arbori distincti $H_1$, $H_2$,..., $H_{n-k}$, cu $H_i = (X_i, U_i)$, astfel incat $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{n-k}$.
- Prin unificare a doi arbori existenti obtinem n - k - 1 arbori disjuncti.

Alegerea celor doi arbori se poate face astfel:

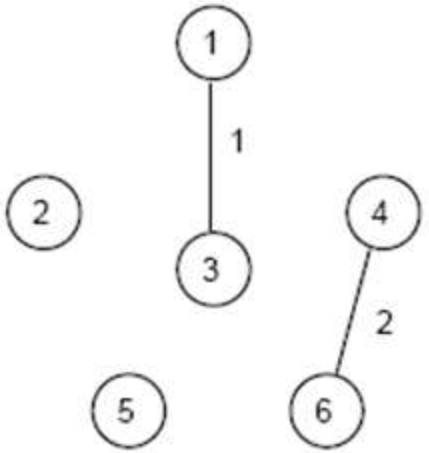
- *Dintre toate muchiile nealese inca, se selecteaza aceea de cost minim care are doua extremitati in doua multimi diferite $X_i$ si $X_j$ (pentru ca sa nu formam un ciclu).*
- Prin adaugarea acestei muchii u, din arborii $H_i$ si $H_j$ se va forma un nou arbore $H' = (X', U')$, $X' = X_i \cup X_j$, si $U' = U_i \cup U_j \cup \{u\}$.
- Dupa n - 2 pasi obtinem un singur arbore.


1
2
3
4
5
6
6
5
1
5
5
3
6
4
2
5
5

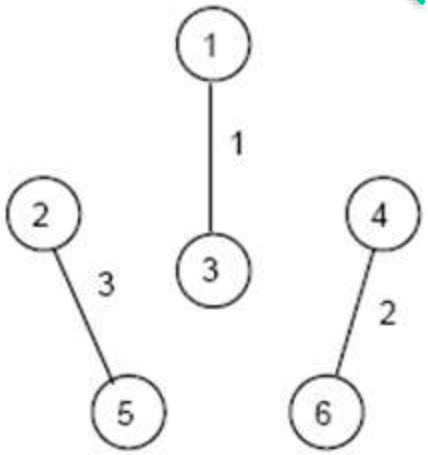
(0)


1
1
2
3
4
5
6

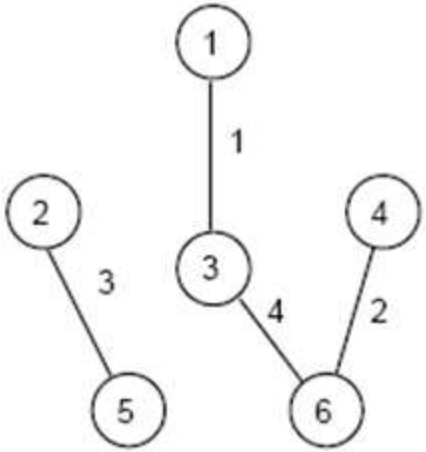
(1)


1
1
2
3
4
2
5
6

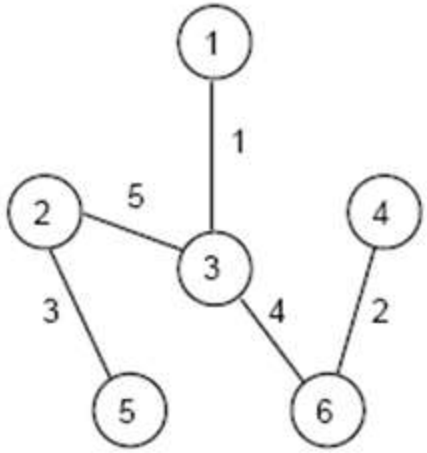
(2)


1
1
2
3
4
3
2
5
6

(3)


1
1
2
3
4
3
4
2
5
6

(4)


1
1
2
5
3
4
3
4
2
5
6

(5)

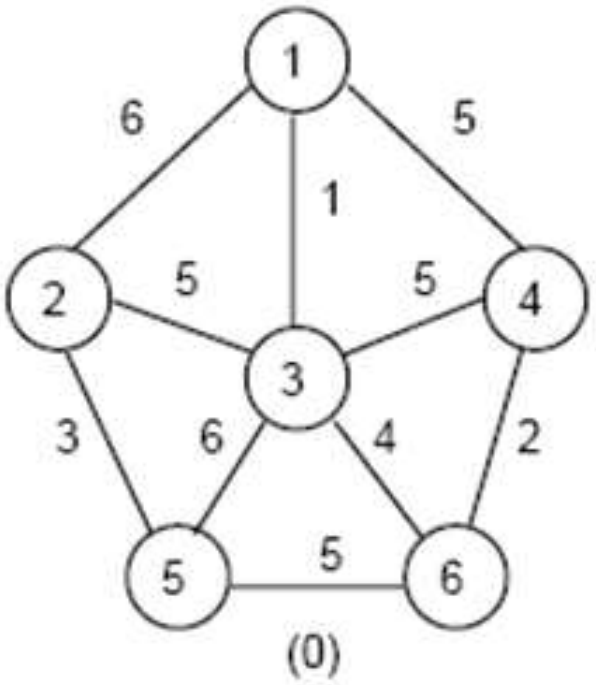
```
#include<iostream.h>
struct muchie
{
   int x,y;
   float cost;
} b[30],f;
int n,m,i,k,ct,l[30],j;
int main()
{
   cout<<"nr. de varfuri";    cin>>n;
   cout<<"nr. de muchii";    cin>>m;
```

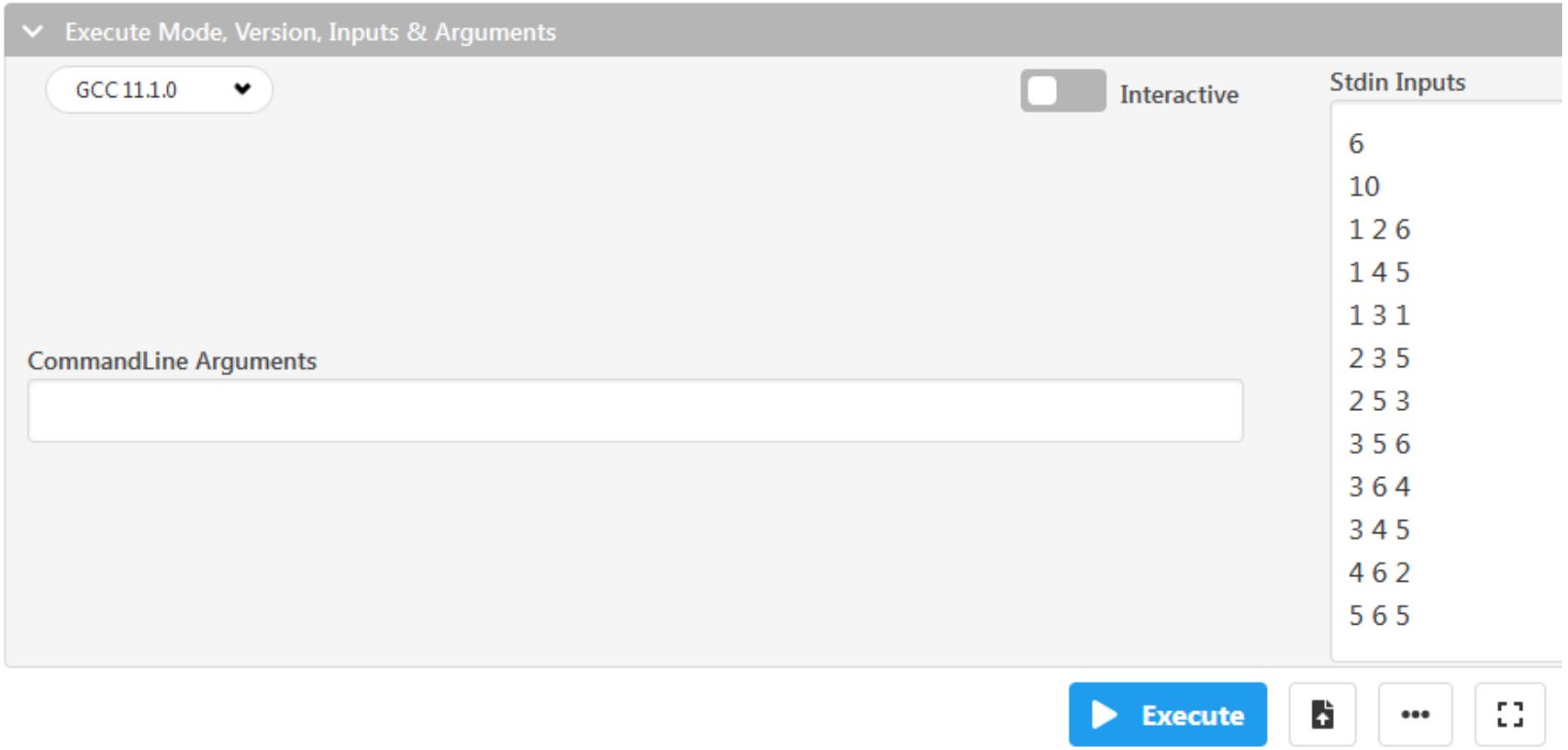
```
for(i=1;i<=m;i++)
   {
        cout<<"muchia "<<i<<"( x,";
        cin>>b[i].x;
        cout<<"y) = ";
        cin>>b[i].y;
        cout<<"costul muchiei = ";
        cin>>b[i].cost;
   }
   for(i=1;i<=n;i++)      l[i]=i;
```

```
// ordonarea muchiilor dupa cost
   for(i=1;i<m;i++)
        for(j=i+1;j<=m;j++)
          if(b[i].cost>b[j].cost)
                {
                        f=b[i];
                        b[i]=b[j];
                        b[j]=f;
                }
   k=0;        // nr. de muchii selectate
   ct=0;       // costul total
   i=1;
```

```
while(k<n-1)
   {
        if(l[b[i].x]!=l[b[i].y])
        {
                k++;
                ct+=b[i].cost;
                for(j=1;j<=n;j++)
                        if(l[j]==l[b[i].x])
                                l[j]=l[b[i].y];
                cout<<b[i].x<<" "<<b[i].y<<endl;
        }
        i++;
   }
   cout<<"Costul total = "<<ct<<endl;
}
```

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;
struct muchie
{
    int x,y;
    float cost;
} b[30],f;
int n,m,i,k,ct,l[30],j;
int main()
{
    //cout<<"nr. de varfuri";
    cin>>n;
    //cout<<"nr. de muchii";
    cin>>m;
    for(i=1;i<=m;i++)
    {
        //cout<<"muchia "<<i<<"( x,";
        cin>>b[i].x;
        //cout<<"y) = ";
        cin>>b[i].y;
        //cout<<"costul muchiei = ";
        cin>>b[i].cost;
    }
    for(i=1;i<=n;i++)   l[i]=i;
    // ordonarea muchiilor dupa cost
    for(i=1;i<m;i++)
        for(j=i+1;j<=m;j++)
           if(b[i].cost>b[j].cost)
            {
                f=b[i];
                b[i]=b[j];
                b[j]=f;
            }
    k=0;    // nr. de muchii selectate
    ct=0;   // costul total
    i=1;
    while(k<n-1)
    {
        if(l[b[i].x]!=l[b[i].y])
        {
            k++;
            ct+=b[i].cost;
            for(j=1;j<=n;j++)
                if(l[j]==l[b[i].x])
                    l[j]=l[b[i].y];
            cout<<b[i].x<<" "<<b[i].y<<endl;
        }
        i++;
    }
    cout<<"Costul total = "<<ct<<endl;

    return 0;
}
```




Execute Mode, Version, Inputs & Arguments
GCC 11.1.0
Interactive
Stdin Inputs
6
10
1 2 6
1 4 5
1 3 1
2 3 5
2 5 3
3 5 6
3 6 4
3 4 5
4 6 2
5 6 5
CommandLine Arguments
Execute
Result
CPU Time: 0.00 sec(s), Memory: 3528 kilobyte(s)
1 3
4 6
2 5
3 6
2 3
Costul total = 15

# Conţinutul cursului

## 2) Algoritmul lui Prim

- Graful este dat prin matricea costurilor

$$Cij=\begin{cases} \text{costul muchiei } [i,j], \text{ daca } [i,j] \in U \\ 0, \text{ in caz contrar} \end{cases}$$

- Se porneste initial, ca si in algoritmul lui Kruskal, cu n arbori distincti, si la fiecare pas k vom avea un arbore cu k+1 varfuri si n-k-1 arbori cu cate un singur varf fiecare
- *La pasul k se alege muchia de cost minim care are o extremitate in arborele cu mai multe varfuri iar cealalta intr-unul din ceilalti arbori.*
- Initial se alege muchia de cost minim.

Implementarea algoritmului lui Prim:

```
# include <iostream.h>
# include <stdio.h>
typedef struct min
        {
         int lin,col;
        }min;
int n,a[50][50],m[50][50];

void afisare(int a[50][50],int n)
{
  int i,j;
  for(i=1;i<=n;i++)
    {
      for(j=1;j<=n;j++)  cout<<" "<<a[i][j];
      cout<<"\n";
    }
}
```

```
int in(int v[50],int n,int x)
{
  for(int i=1;i<=n;i++)
    if (v[i]==x) return 1;
  return 0;
}
min minim(int v[50],int k)
{
  min min0;
  int i,j;
  int min1=32000;
  for(i=1;i<=k;i++)
    for(j=1;j<=n;j++)
      if (m[v[i]][j]<min1 && m[v[i]][j]!=0 && in(v,k,j)==0)
       { min0.lin=v[i];
         min0.col=j;
         min1=m[v[i]][j];
        }
  return min0;
}
```

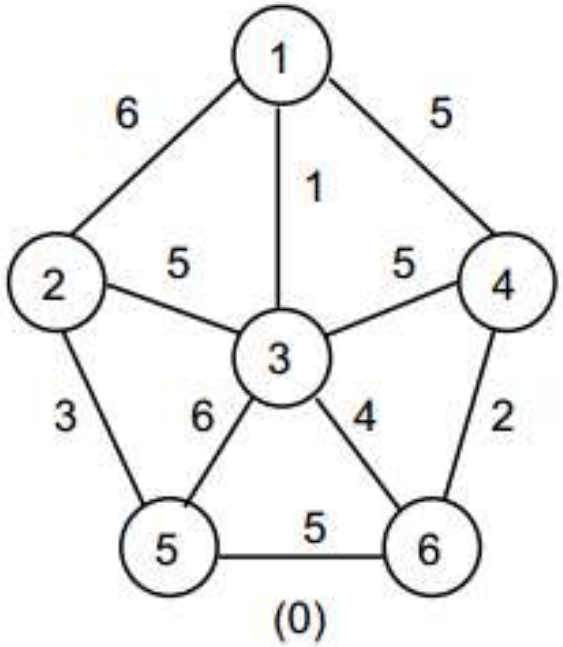
Verificam daca muchia (v[i], j):
- este cea mai mica
- nu a fost selectata
- si are o extremitate in arborele cu cele mai multe varfuri si cea de a doua extremitate intr-unul din ceilalti arbori

```
int main(void)
{
  int t[50][50],vec[50],i,j,v,k,x,y;
  cout<<"Citirea matricei de adiacenta a grafului
   \n";
  cout<<"Dati numarul de varfuri n = "; cin>>n;
  for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=n;j++)
       cin>>a[i][j];
  cout<<"\n graful are "<<n<<" noduri, matricea
   sa de adiacenta fiind:\n";
  afisare(a,n);
```

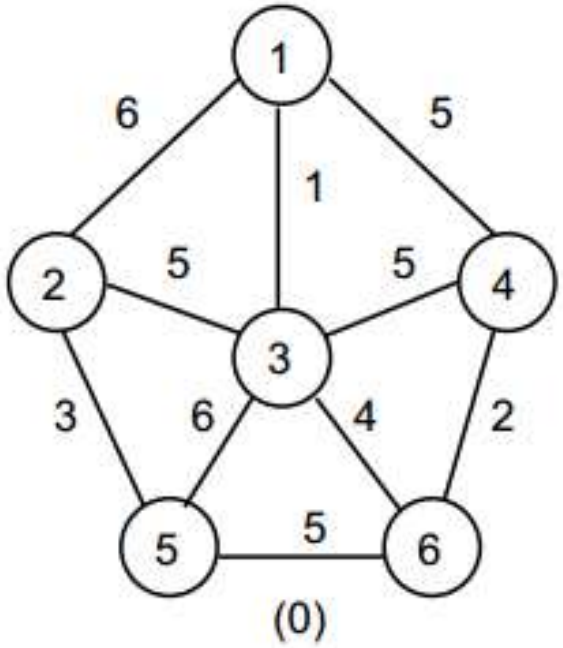
```
for(i=1;i<=n;i++) m[i][i]=0;
for(i=1;i<n;i++)
   for(j=i+1;j<=n;j++)
     if (a[i][j]==1)
     {
        cout<<"\n costul muchiei ("<<i<<","<<j<<")=";
        cin>>m[i][j];
        m[j][i]=m[i][j];
     }
   else
    {
      m[i][j]=1000;
      m[j][i]=1000;
    }
  cout<<"\n matricea costurilor este :\n";
  afisare(m,n);
```

```
cout<<"introduceti un nod v (1<=v<="<<n<<")";
cin>>v;
for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=n;j++) t[i][j]=0;
k=1;
vec[k]=v;
for(i=1;i<n;i++)
  {
    x=minim(vec,k).lin;
    y=minim(vec,k).col;
    t[x][y]=m[x][y];
    t[y][x]=t[x][y];
    m[x][y]=1000;
    m[y][x]=1000;
    k++;
    vec[k]=y;
  }
cout<<"arborele de cost minim rezultat este:\n";
afisare(t,n);
}
```

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

struct min
{
    int lin;
    int col;
};
int n,a[50][50],m[50][50];
int t[50][50],vec[50],i,j,v,k,x,y;

void afisare(int a[50][50],int n)
{
  int i,j;
  for(i=1;i<=n;i++)
    {
      for(j=1;j<=n;j++)  cout<<" "<<a[i][j];
      cout<<"\n";
    }
}
int in(int v[50],int n,int x)
{
  for(int i=1;i<=n;i++)
    if (v[i]==x) return 1;
  return 0;
}
struct min minim(int v[50],int k)
{
  struct min min0;
  int i,j;
  int min1=32000;
  for(i=1;i<=k;i++)
    for(j=1;j<=n;j++)
      if (m[v[i]][j]<min1 && m[v[i]][j]!=0 && in(v,k,j)==0)
       {
           min0.lin = v[i];
           min0.col = j;
           min1 = m[v[i]][j];
        }
  return min0;
}
```

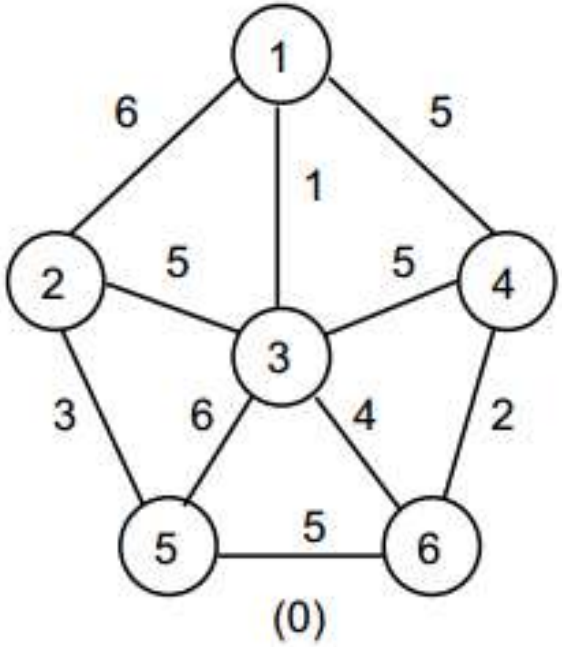


```
int main(void)
{
  //cout<<"Citirea matricei de adiacenta a grafului \n";
  //cout<<"Dati numarul de varfuri n = ";
  cin>>n;
  for(i=1;i<=n;i++)
    for(j=1;j<=n;j++)
       cin>>a[i][j];
  cout<<"\n graful are "<<n<<" noduri, matricea sa de adiacenta fiind:\n";
  afisare(a,n);
  for(i=1;i<=n;i++) m[i][i]=0;
  for(i=1;i<n;i++)
      for(j=i+1;j<=n;j++)
          if (a[i][j]==1)
          {
              //cout<<"\n costul muchiei ("<<i<<","<<j<<")=";
              cin>>m[i][j];
              m[j][i]=m[i][j];
          }
          else
            {
              m[i][j]=1000;
              m[j][i]=1000;
            }
  cout<<"\n matricea costurilor este :\n";
  afisare(m,n);
  //cout<<"introduceti un nod v (1<=v<="<<n<<")";
  cin>>v;
  for(i=1;i<=n;i++)
     for(j=1;j<=n;j++) t[i][j]=0;
    k=1;
    vec[k]=v;
    for(i=1;i<n;i++)
       {
         x=minim(vec,k).lin;
         y=minim(vec,k).col;
         t[x][y]=m[x][y];
         t[y][x]=t[x][y];
         m[x][y]=1000;
         m[y][x]=1000;
         k++;
         vec[k]=y;
       }
    cout<<"arborele de cost minim rezultat este:\n";
    afisare(t,n);

  return 0;
}
```



Stdin Inputs

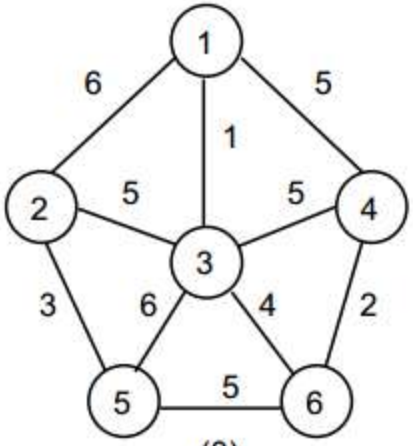
```
6
0 1 1 1 0 0
1 0 1 0 1 0
1 1 0 1 1 1
0 0 1 0 0 1
0 0 1 0 0 1
0 0 1 0 1 0
1 2 6
1 4 5
1 3 1
2 3 5
2 5 3
3 5 6
3 6 4
3 4 5
4 6 2
5 6 5
1
```



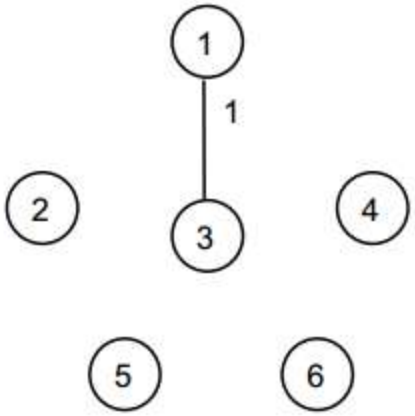

Result

CPU Time: 0.00 sec(s), Memory: 3476 kilobyte(s)

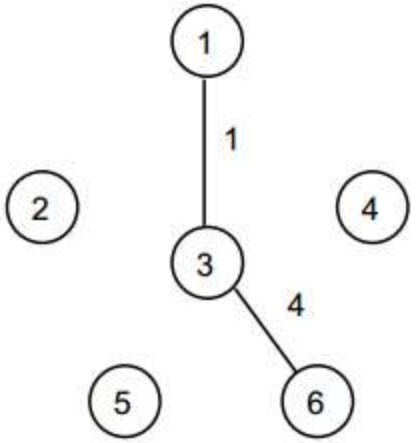
```
graful are 6 noduri, matricea sa de adiacenta fiind:
0 1 1 1 0 0
1 0 1 0 1 0
1 1 0 1 1 1
0 0 1 0 0 1
0 0 1 0 0 1
0 0 1 0 1 0

matricea costurilor este :
0 1 2 6 1000 1000
1 0 1 1000 4 1000
2 1 0 5 1 3
6 1000 5 0 1000 1
1000 4 1 1000 0 2
1000 1000 3 1 2 0
arborele de cost minim rezultat este:
0 1 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1
0 0 1 0 0 2
0 0 0 1 2 0
```



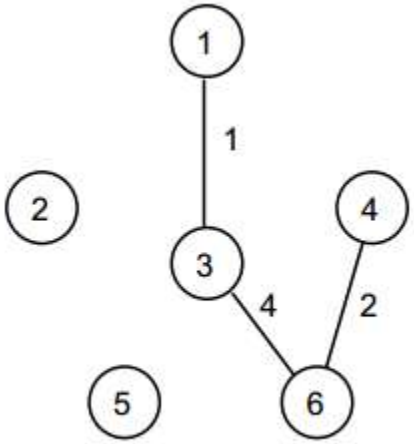
(0)



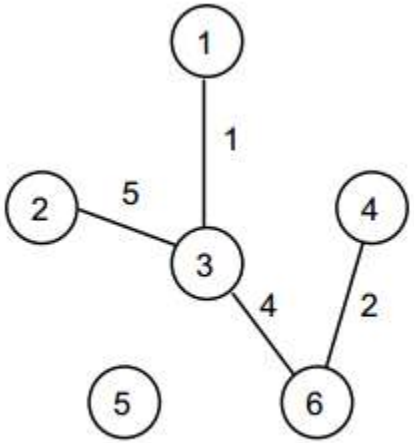
(1)



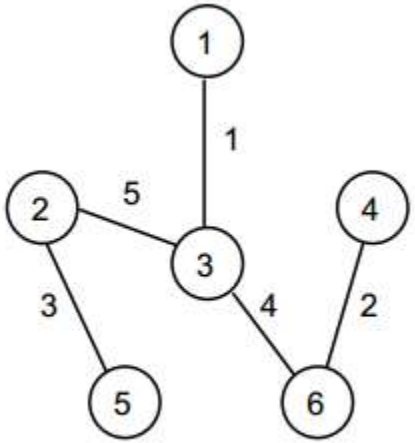
(2)



(3)



(4)



(5)

Construcția unui arbore de acoperire minim al unui graf pe baza algoritmului lui Prim

(0) initializare

| Nod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Apropiat | - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| CostMin | ∞ | 6 | 1 | 5 | ∞ | ∞ |

**U**={1}
**N-U**={2,3,4,5,6}

(1) se selecteaza nodul 3

| Nod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Apropiat | - | 3 | - | 1 | 3 | 3 |
| CostMin | ∞ | 5 | ∞ | 5 | 6 | 4 |

**U**={1,3}
**N-U**={2,4,5,6}

(2) se selecteaza nodul 6

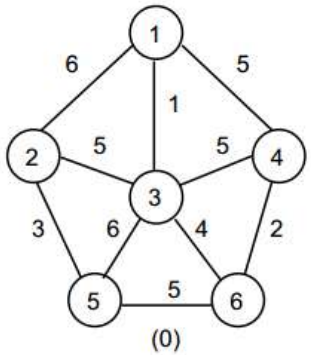
| Nod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Apropiat | - | 3 | - | 6 | 3 | - |
| CostMin | ∞ | 5 | ∞ | 2 | 6 | ∞ |

**U**={1,3,6}
**N-U**={2,4,5}

(3) se selecteaza nodul 4

| Nod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Apropiat | - | 3 | - | - | 3 | - |
| CostMin | ∞ | 5 | ∞ | ∞ | 6 | ∞ |

**U**={1,3,6,4}
**N-U**={2,5}




(4) se selecteaza nodul 2

| Nod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Apropiat | - | - | - | - | 2 | - |
| CostMin | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | 3 | ∞ |

**U**={1,3,6,4,2}
**N-U**={5}

(5) se selecteaza nodul 5

| Nod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Apropiat | - | - | - | - | - | - |
| CostMin | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |

**U**={1,3,6,4,2,5}
**N-U**={ }

Exemplu de aplicare al algoritmului lui PRIM

**Aplicatie:**

O companie construieşte o reţea de şosele.

Se propun 3 soluţii care urmăresc
următoarele aspecte:

1. minimizarea costului lucrărilor
2. minimizarea costului de acces din capitală la oricare din localităţile judeţului
3. o variantă de compromis

## Propuneri de solutionare:

- 3 metode de determinare al arborelui de acoperire minim
- 1 metodă de determinare a drumurilor minime
- 1 metodă de compromis – arborele de acoperire minim cu rădăcina în nodul preferenţial

# Conţinutul cursului

**9.1. Definitii. Reprezentari ale arborilor**
**9.2. Grafuri ponderate. Arborele partial de cost minim**
**9.2.1. Algoritmul lui Kruskal**
**9.2.2. Algoritmul lui Prim**
**9.3. Arbori binari. Definitii. Reprezentare. Metode de parcurgere**

# 9.3. Arbori binari

***Definitie***

Un ***arbore binar*** este *un arbore în care orice vârf are cel mult doi descendenţi*, cu precizarea că se face distincţie între descendentul stâng şi cel drept.

Primele probleme care se pun pentru arborii binari sunt:

1. modul de reprezentare
2. metode de parcurgerea a lor

# 9.3. Arbori binari

Forma standard de reprezentare a unui arbore binar constă în:

- a preciza *rădăcina arborelui = (notatie) răd*
- a preciza pentru fiecare vârf i *tripletul:*
  - *st(i)* = descendentul stâng
  - *dr(i)* = descendentul drept
  - *info(i)* = informaţia ataşată vârfului

Trebuie stabilită o convenţie pentru lipsa unuia sau a ambilor descendenţi, ca de exemplu specificarea lor prin valoarea 0.

# 9.3. Arbori binari

Tipuri de reprezentari statice:

1) Cu ajutorul a doi vectori:

Vectorul **st** – care contine descendentii stangi ai unui nod

Vectorul **dr** - care contine descendentii drepti ai unui nod

# 9.3. Arbori binari

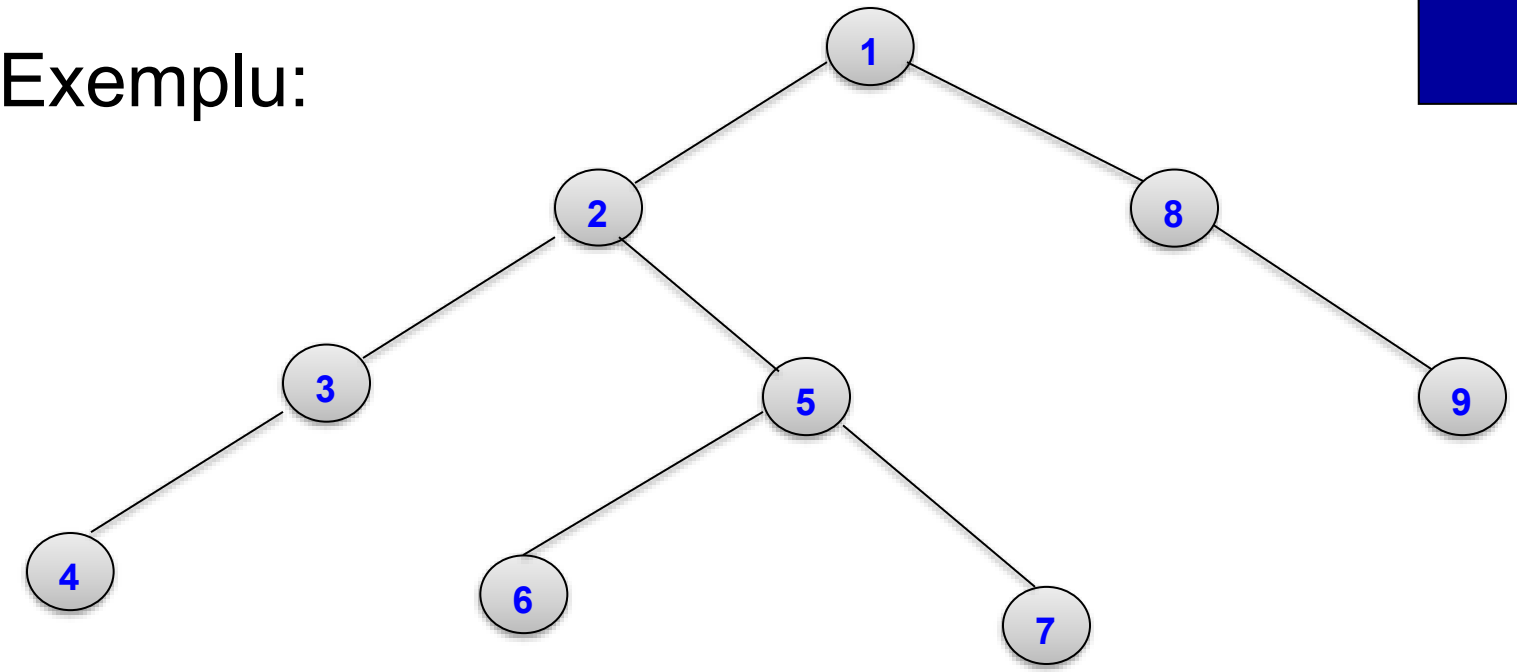
Tipuri de reprezentari statice:

2) Cu ajutorul altor doi vectori:

Vectorul **tata** care retine valorile care sunt descendenti ai fiecarui nod in parte

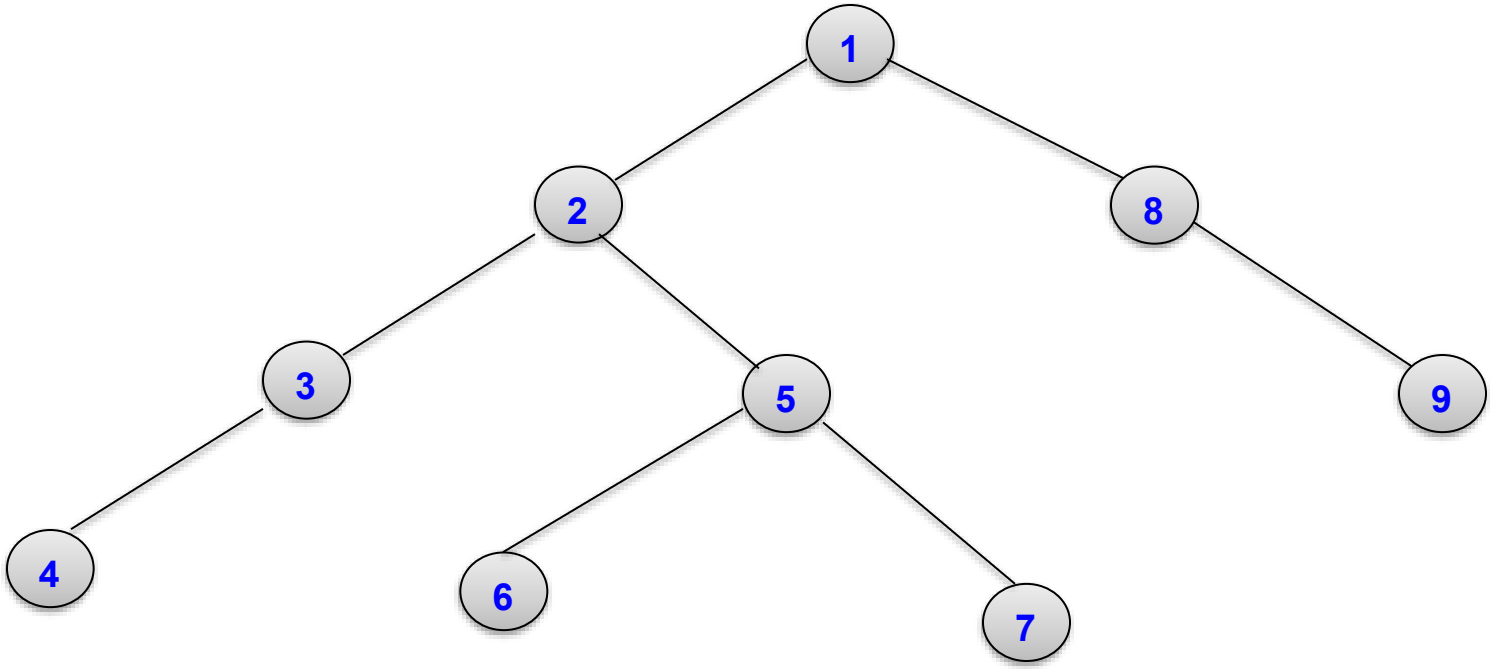
Vectorul **desc** care are valori de -1 sau 1 prin care se specifica daca un nod este descendent stang, respectiv drept.

Exemplu:




Presupunând că informaţia ataşată fiecărui vârf este chiar numărul său de ordine, avem:

- rad = 1
- st = (2,3,4,0,6,0,0,0,0)
- dr = (8,5,0,0,7,0,0,9,0)
- info= (1,2,3,4,5,6,7,8,9)




Pentru exemplul de mai sus:

- tata = (0,1,2,3,2,5,5,1,8)
- desc = (0,-1,-1,-1,1,-1,1,1,1)
- info = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)

# 9.3. Arbori binari

***Definitie***

Numim **nod terminal** sau **frunza**, un nod fara descendenti.

***Definitie***

Numim **arbore binar complet**, un arbore binar in care fiecare nod care nu este terminal are exact doi descendenti.

***Propozitie***

Un arbore binar complet care are n noduri terminale, toate situate pe acelasi nivel, are in total 2*n-1 noduri.

# 9.3. Arbori binari

## Parcurgerea arborilor binari

Problema *parcurgerii unui arbore binar* constă în identificarea unei modalităţi prin care, plecând din rădăcină şi mergând pe muchii, să ajungem în toate vârfurile; în plus, atingerea fiecărui vârf este pusă în evidenţă *o singură dată*: spunem că *vizităm* vârful respectiv.

Acţiunea întreprinsă la vizitarea unui vârf depinde de problema concretă şi poate fi de exemplu tipărirea informaţiei ataşate vârfului.

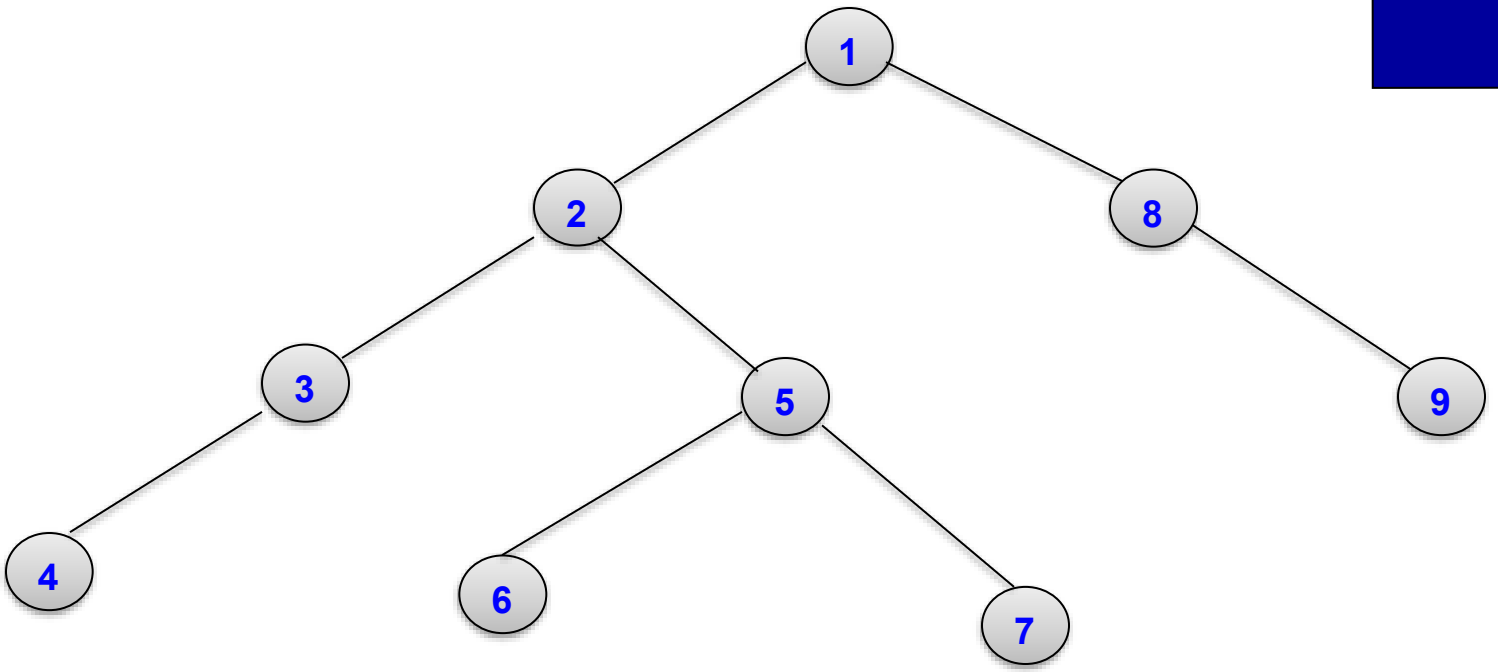
# 9.3. Arbori binari

Distingem trei modalităţi standard de parcurgere a unui arbore binar:

**1) Parcurgerea în preordine**

- Se parcurg recursiv în ordine: *rădăcina, subarborele stâng, subarborele drept*.
- Concret, se execută apelul preordine(rad) pentru procedura:

```
void preordine(int x)
{
  if( x!=0 ){
        cout<<x<<" ";
        preordine(st(x));
        preordine(dr(x));
   }
   return;
}
```




Pentru arborele binar de mai sus acest modul de parcurgere, este precizat figurând îngroşat rădăcinile subarborilor ce trebuie dezvoltaţi:

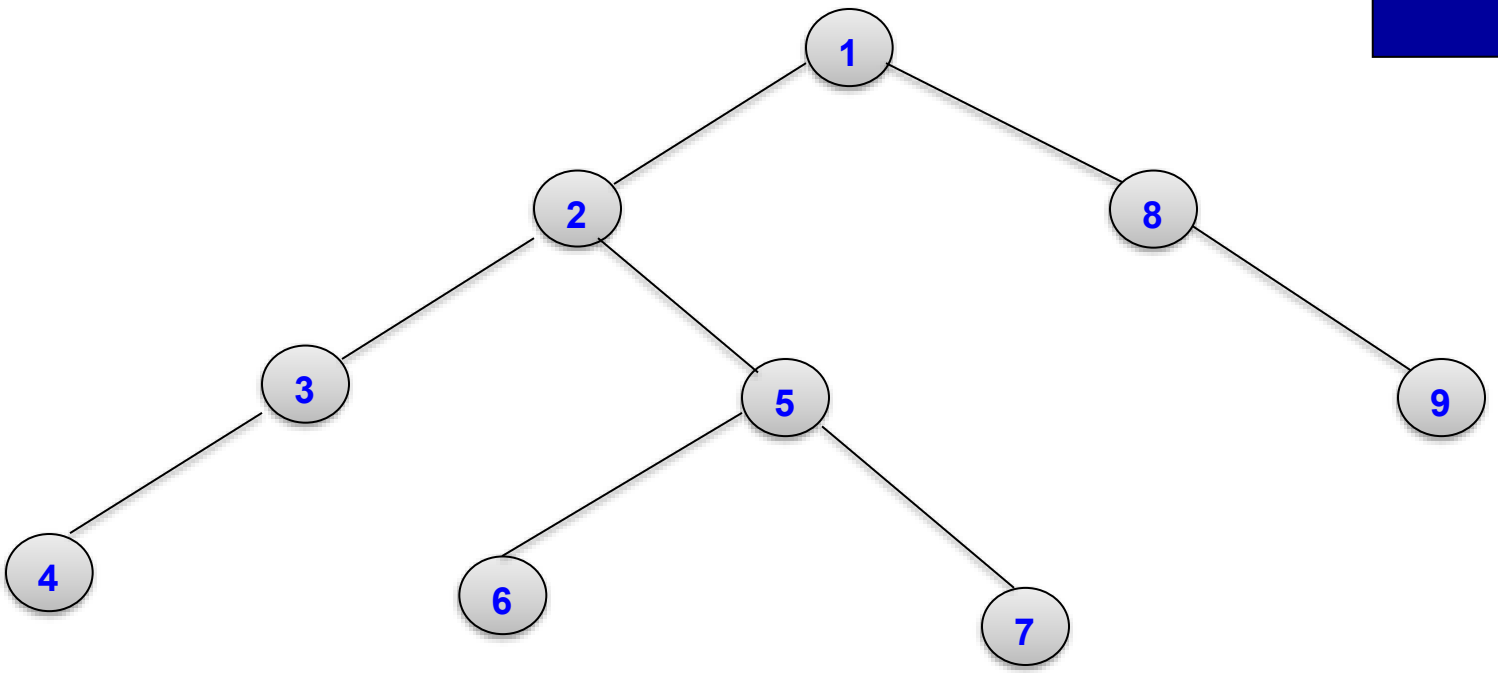
- **1**
- 1, **2**, **8**
- 1, 2, **3**, **5**, 8, 9
- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

# 9.3. Arbori binari

**2) Parcurgerea în inordine**

- Se parcurg recursiv în ordine: *subarborele stâng, rădăcina, subarborele drept*.
- Concret, se execută apelul inordine(rad) pentru procedura:

```
void inordine(int x)
{
  if( x!=0 )
   {
        inordine(st(x));
        cout<<x<<" ";
        inordine(dr(x));
   }
   return;
}
```




Modul de parcurgere pentru exemplul de mai sus:

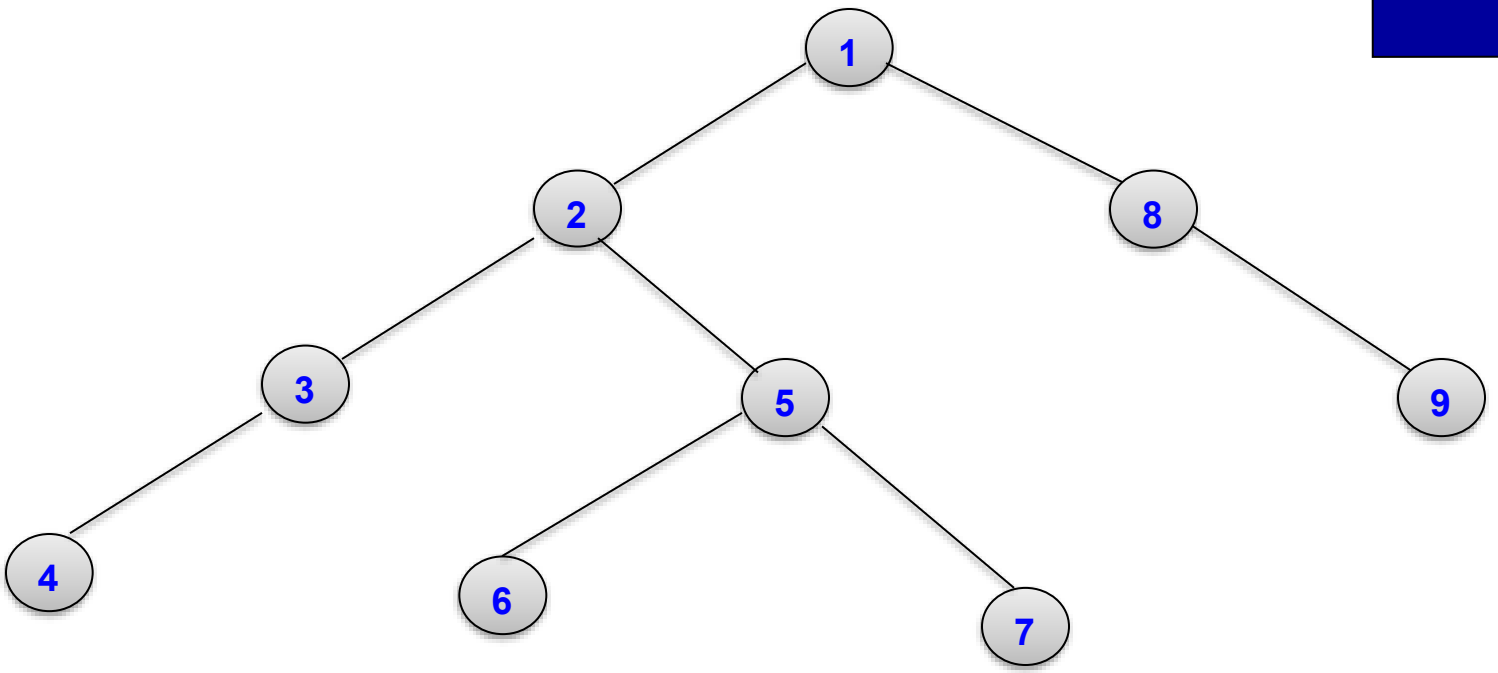
- **1**
- **2**, 1, **8**
- **3**, 2, **5**, 1, 8, 9
- 4, 3, 2, 6, 5, 7, 1, 8, 9

# 9.3. Arbori binari

**3) Parcurgerea în postordine**

- Se parcurg recursiv în ordine: *subarborele stâng, subarborele drept, rădăcina*.
- Concret, se execută apelul postordine(rad) pentru procedura:

```
void postordine(int x)
{
  if( x!=0 )
   {
        postordine(st(x));
        postordine(dr(x));
        cout<<x<<" ";
   }
   return;
}
```




Modul de parcurgere pentru exemplul de mai sus:

- **1**
- **2**, **8**, 1
- **3**, **5**, 2, 9, 8, 1
- 4, 3, 6, 7, 5, 2, 9, 8, 1

# 9.3. Arbori binari

Folosirea alocarii dinamice a memoriei (listelor dublu inlantuite) pentru a implementa arborii binari:

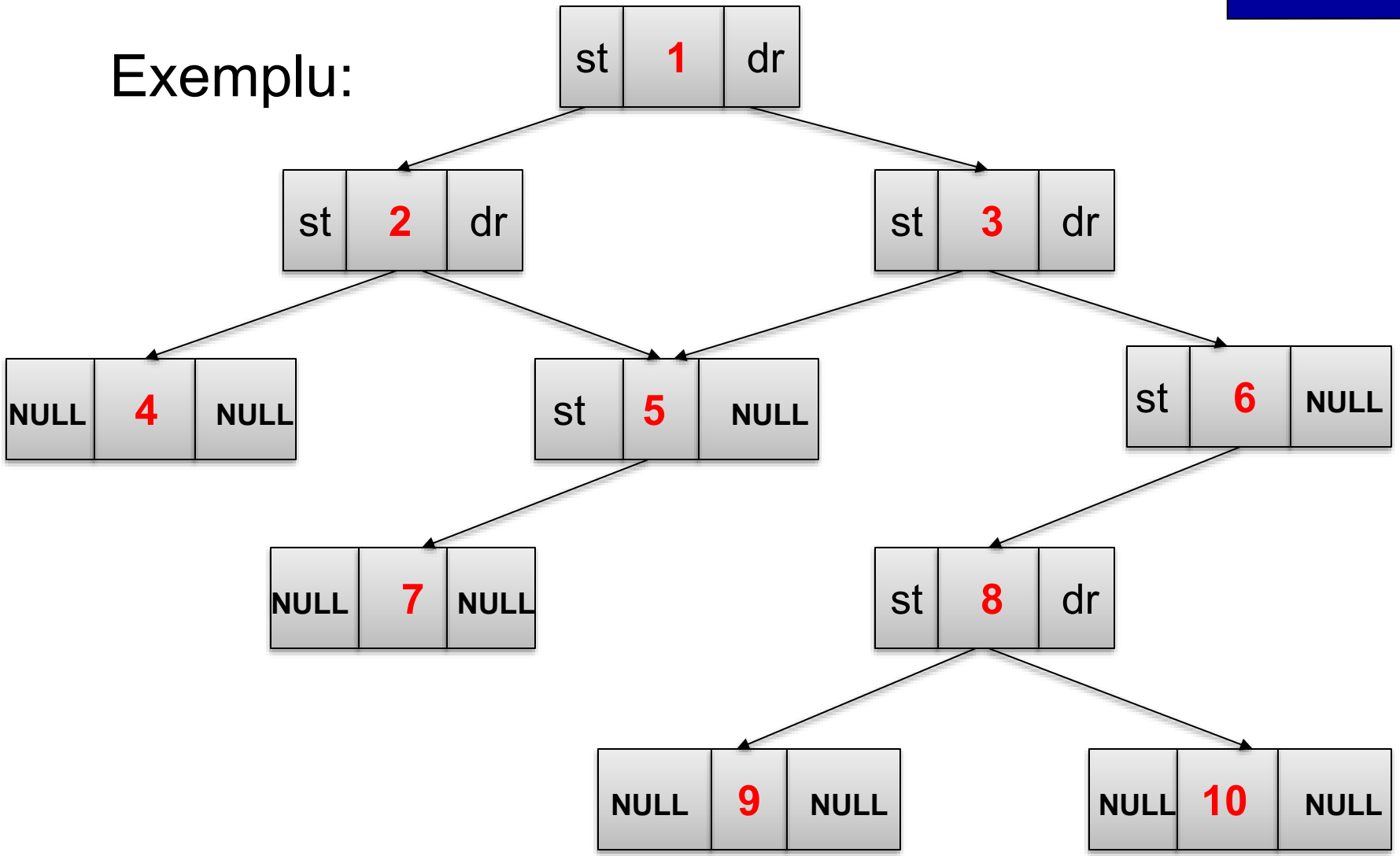
Se poate declara o structura de tip dinamic, astfel:

```
typedef struct arbore
{
   int inf;
   struct arbore *st, *dr;
}arbore;
```

Pointerul care retine adresa radacinii se poate declara astfel:

```
arbore *rad;
```

Exemplu:


st 1 dr
st 2 dr
st 3 dr
NULL 4 NULL
st 5 NULL
st 6 NULL
NULL 7 NULL
st 8 dr
NULL 9 NULL
NULL 10 NULL

Codul sursa pentru creare a unui arbore binar cu ajutorul alocarii dinamice a memoriei si apoi traversarea arborelui:

```
#include <iostream>
using namespace std;
typedef struct arbore
    {
      int inf;
      struct arbore *st,*dr;
    }arbore;
```

```
arbore *creare(void)
{
  arbore *aux;
  char ch;
  cout<<"\n Introduceti nod NULL? [d/n]";
  cin>>ch;
  ch=toupper(ch);
  if (ch=='N')
    {
      aux = new arbore;
      cout<<"\n informatia="; cin>>aux->inf;
      cout<<"\n urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia
     "<<aux->inf;
      aux->st=creare();
      cout<<"\n urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia
     "<<aux->inf;
      aux->dr=creare();
      return aux;
    }
     else return NULL;
}
```

```
void preordine(arbore *a)
{
  if (a!=NULL)
    {
      cout<<" "<<a->inf;
      preordine (a->st);
      preordine (a->dr);
     }
}
void inordine(arbore *a)
{
 if(a!=NULL)
   {
     inordine (a->st);
     cout<<" "<<a->inf;
     inordine (a->dr);
   }
}
```

```
void postordine(arbore *a)
{
  if (a!=NULL)
    {
      postordine (a->st);
      postordine (a->dr);
      cout<<" "<<a->inf;
    }
}
int main(void)
{
  arbore *a;
  a=creare();
  cout<<"\n parcurgerea preordine este ";
  preordine (a);
  cout<<"\n parcurgerea inordine este ";
  inordine (a);
  cout<<"\n parcurgerea postordine este ";
  postordine (a);
}
```

```
informatia=1

urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia 1
e nod NULL?[d/n]n

informatia=2

urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia 2
e nod NULL?[d/n]d

urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia 2
e nod NULL?[d/n]d

urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia 1
e nod NULL?[d/n]n

informatia=3

urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia 3
e nod NULL?[d/n]n

informatia=5

urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia 5
e nod NULL?[d/n]n

informatia=6

urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia 6
e nod NULL?[d/n]d

urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia 6
e nod NULL?[d/n]d

urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia 5
e nod NULL?[d/n]n

informatia=7

urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia 7
e nod NULL?[d/n]d

urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia 7
e nod NULL?[d/n]d

urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia 3
e nod NULL?[d/n]n

informatia=4

urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia 4
e nod NULL?[d/n]d

urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia 4
e nod NULL?[d/n]d

parcurgerea RSD este  1 2 3 5 6 7 4
parcurgerea SRD este  2 1 6 5 7 3 4
parcurgerea SDR este  2 6 7 5 4 3 1
```

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

typedef struct arbore
{
    int inf;
    struct arbore *st,*dr;
}arbore;

arbore *creare(void)
{
  arbore *aux;
  char ch;
  //cout<<"\n Introduceti nod NULL? [d/n]";
  cin>>ch;
  ch = toupper(ch);
  if (ch == 'N')
    {
      aux = new arbore;
      //cout<<"\n informatia=";
      cin>>aux->inf;
      cout<<"\n urmeaza succesorul stang al nodului cu informatia "<<aux->inf;
      aux->st = creare();
      cout<<"\n urmeaza succesorul drept al nodului cu informatia "<<aux->inf;
      aux->dr = creare();
      return aux;
    }
     else return NULL;
}
void preordine(arbore *a)
{
  if (a!=NULL)
    {
      cout<<" "<<a->inf;
      preordine (a->st);
      preordine (a->dr);
     }
}
```

```cpp

void inordine(arbore *a)
{
 if(a!=NULL)
   {
     inordine (a->st);
     cout<<" "<<a->inf;
     inordine (a->dr);
   }
}
void postordine(arbore *a)
{
  if (a!=NULL)
    {
      postordine (a->st);
      postordine (a->dr);
      cout<<" "<<a->inf;
    }
}
int main(void)
{
    arbore *a;
    a = creare();
    cout<<"\n parcurgerea preordine este ";
    preordine(a);
    cout<<"\n parcurgerea inordine este ";
    inordine(a);
    cout<<"\n parcurgerea postordine este ";
    postordine(a);
    return 0;
}
```

Codul sursa pentru creare a unui arbore binar cu ajutorul vectorilor st si dr si apoi traversarea arborelui:

```
#include <iostream>
using namespace std;
int st[15],dr[15],n,i,j,rad;
void inordine(int x)
{
  if (st[x]!=0) inordine(st[x]);
  cout<<" "<<x;
  if (dr[x]!=0) inordine(dr[x]);
}
void preordine(int x)
{
  cout<<" "<<x;
  if (st[x]!=0) preordine(st[x]);
  if (dr[x]!=0) preordine(dr[x]);
}
```

```
void postordine(int x)
{
  if (st[x]!=0) postordine(st[x]);
  if (dr[x]!=0) postordine(dr[x]);
  cout<<" "<<x;
}
int main(void)
{
     //cout<<"Dati numarul de noduri n = ";
     cin>>n;
     //cout<<"Dati radacina rad = ";
     cin>>rad;
     for(i=1;i<=n;i++)
     {
            //cout<<"st["<<i<<"]=";
            cin>>st[i];
            //cout<<"dr["<<i<<"]=";
            cin>>dr[i];
     }
    cout<<"\n parcurgerea in inordine este ";
    inordine(rad);
    cout<<"\n parcurgerea in preordine este ";
    preordine(rad);
    cout<<"\n parcurgerea in postordine este ";
    postordine(rad);
}
```

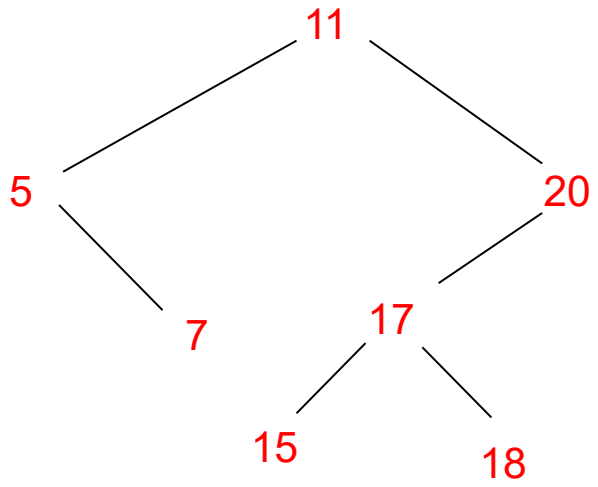
```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

int st[15],dr[15],n,i,j,rad;
void inordine(int x)
{
  if (st[x]!=0) inordine(st[x]);
  cout<<" "<<x;
  if (dr[x]!=0) inordine(dr[x]);
}
void preordine(int x)
{
  cout<<" "<<x;
  if (st[x]!=0) preordine(st[x]);
  if (dr[x]!=0) preordine(dr[x]);
}
void postordine(int x)
{
  if (st[x]!=0) postordine(st[x]);
  if (dr[x]!=0) postordine(dr[x]);
  cout<<" "<<x;
}
int main(void)
{
    //cout<<"Dati numarul de noduri n = ";
    cin>>n;
    //cout<<"Dati radacina rad = ";
    cin>>rad;
    for(i=1;i<=n;i++)
    {
        //cout<<"st["<<i<<"]=";
        cin>>st[i];
        //cout<<"dr["<<i<<"]=";
        cin>>dr[i];
    }
    cout<<"\n parcurgerea in inordine este ";
    inordine(rad);
    cout<<"\n parcurgerea in preordine este ";
    preordine(rad);
    cout<<"\n parcurgerea in postordine este ";
    postordine(rad);

    return 0;
}
```


Execute Mode, Version, Inputs & Arguments
GCC 11.1.0
Interactive
Stdin Inputs
7
1
2 3 0 0
5 4 0 0
6 7 0 0 0 0
CommandLine Arguments
Execute
Result
CPU Time: 0.00 sec(s), Memory: 3496 kilobyte(s)
parcurgerea in inordine este 2 1 6 5 7 3 4
parcurgerea in preordine este 1 2 3 5 6 7 4
parcurgerea in postordine este 2 6 7 5 4 3 1

# Arbori de sortare

***Definitie***

Un ***arbore de sortare*** *este un arbore binar în care pentru orice vârf informaţia ataşată vârfului este mai mare decât informaţiile vârfurilor din subarborele stâng şi mai mică decât informaţiile vârfurilor din subarborele drept*.




*Observaţie*.

Parcurgerea în inordine a unui arbore de căutare produce informaţiile ataşate vârfurilor în ordine crescătoare.

# Întrebări?