PROIECTAREA ALGORITMILOR

Lect. univ. dr. Adrian Runceanu

Curs 11

Metoda Backtracking (continuare)

Conţinutul cursului

11.1. Exemple de probleme rezolvate cu ajutorul metodei backtracking

11.2. Metoda backtracking – varianta recursiva

11.3. Backtracking generalizat in plan

Problema 1

Sa se genereze toate aranjamentele multimii {1, 2, …, n}, cu cate p elemente.

Exemplu:

Pentru n = 5 si p = 3 se vor afisa multimile:

(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1);
(1,2,4), (1,4,2), (2,1,4), (2,4,1), (4,1,2), (4,2,1);
(1,2,5), (1,5,2), (2,1,5), (2,5,1), (5,1,2), (5,2,1);
(1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,1,3), (4,3,1);
(1,3,5), (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3), (5,3,1);
(1,4,5), (1,5,4), (4,1,5), (4,5,1), (5,1,4), (5,4,1),
s.a.m.d.

Implementarea programului pentru generarea aranjamentelor:

```
#include<iostream.h>
int st[20],k,p,as,ev;
void init(int k,int st[ ])
{
  st[k]=0;
}
int succesor(int k,int st[ ])
{
   if ( st[k]<n )
          {
           st[k]=st[k]+1;
           as=1;
           }
      else as=0;
    return as;
}
```

```
int valid(int k,int st[ ])
{
   ev=1;
  for (i=1;i<=k-1;i++)
          if (st[i]==st[k]) ev=0;
   return ev;
}
```

```
int solutie(int k)
{
if ( k==p ) return 1;
        else return 0;
}
void tipar(void)
{
  for(i=1;i<=k;i++)
    cout<<"  "<<st[i];
  cout<<"\n";
 }
```

Sigura modificare fata de algoritmul generarii permutarilor!

```
int main(void)
{
   cout<<“Dati n = “; cin>>n;
   cout<<“Dati p = “; cin>>p;
   k=1; init(k,st);
   while (k>0)
  {
        do{
            as=succesor(k,st);
            if (as) ev=valid(k,st);
         }while (!( !as || (as && ev)));
        if (as)
              if (solutie(k)) tipar();
              else
               {
                  k++;
                  init(k,st);
               }
        else
                  k--;
  }
}
```

Problema 2

Sa se genereze toate combinarile multimii {1, 2, …, n}, cu cate p elemente.

Exemplu:

Pentru n = 5 si p = 3 se vor afisa multimile:

(1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (1,3,4), (1,3,5), (1,4,5), (2,3,4), (2,3,5), (3,4,5).

Implementarea programului pentru generarea combinarilor:

```
#include<iostream.h>
int st[20],k,p,as,ev;
void init(int k,int st[ ])
{
  st[k]=0;
}
int succesor(int k,int st[ ])
{
   if ( st[k]<n )
          {
           st[k]=st[k]+1;
           as=1;
           }
      else as=0;
    return as;
}
```

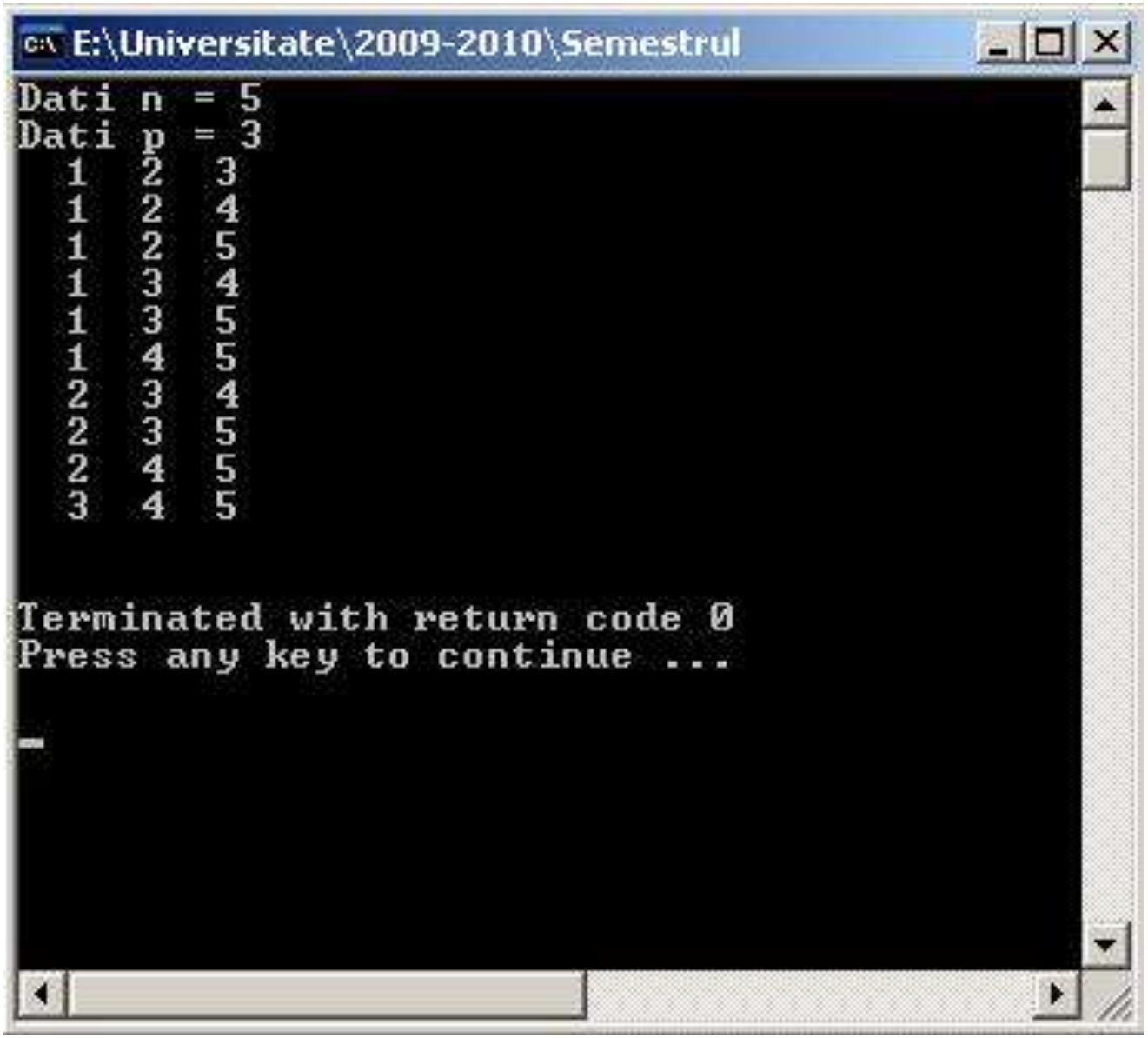
```
int valid(int k,int st[ ])
{
    ev=1;
   for (i=1;i<=k-1;i++)
            if (st[i]==st[k]) ev=0;
    if(k>1)
          if(st[k]<st[k-1]) ev=0;
    return ev;
}
```

- Modificare fata de algoritmul generarii permutarilor!
- Elementele trebuie sa fie in ordine crescatoare

```
int solutie(int k)
{
if ( k==p ) return 1;
        else return 0;
}
void tipar(void)
{
  for(i=1;i<=k;i++)
    cout<<"  "<<st[i];
  cout<<"\n";
 }
```

Generam p combinari !

```
int main(void)
{
   cout<<“Dati n = “; cin>>n;
   cout<<“Dati p = “; cin>>p;
   k=1; init(k,st);
   while (k>0)
  {
        do{
            as=succesor(k,st);
            if (as) ev=valid(k,st);
         }while (!( !as || (as && ev)));
        if (as)
              if (solutie(k)) tipar();
              else
               {
                  k++;
                  init(k,st);
               }
        else
                  k--;
  }
}
```


E:\Universitate\2009-2010\Semestrul
Dati n = 5
Dati p = 3
1 2 3
1 2 4
1 2 5
1 3 4
1 3 5
1 4 5
2 3 4
2 3 5
2 4 5
3 4 5
Terminated with return code 0
Press any key to continue ...

Problema 3

Se considera un numar n natural nenul si se cere sa se afiseze toate descompunerile numarului n in suma de numere naturale.

Exemplu:

Pentru n=5 se vor afisa valorile:

1+1+1+1+1

1+1+1+2;	1+1+2+1;	1+2+1+1;	2+1+1+1
1+2+2;	2+1+2;	2+2+1	
1+1+3;	1+3+1;	3+1+1	
1+4;	4+1		
2+3;	3+2		

5

Implementarea programului:

```
#include<iostream.h>
int st[20],k,as,ev,n,i;
void init(int k,int st[ ])
{
  st[k]=0;
}
int succesor(int k,int st[ ])
{
   if ( st[k]<n )
          {
           st[k]=st[k]+1;
           as=1;
           }
      else as=0;
    return as;
}
```

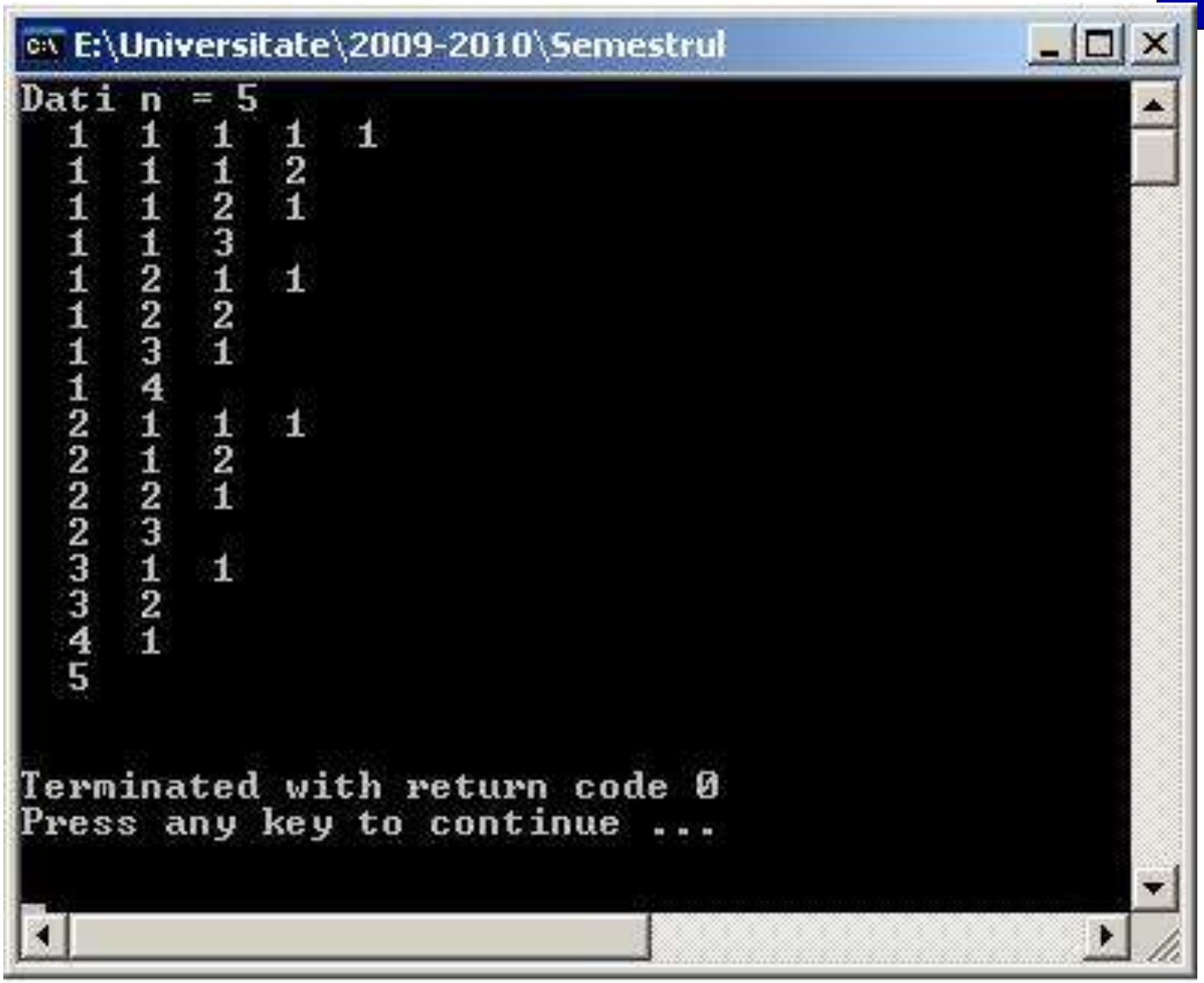
```
int valid(int k,int st[ ])
{
   int s=0;
   ev=1;
   for(i=1;i<=k;i++)
         s+=st[i];
   if( s > n ) ev=0;
   return ev;
}
```

- Trebuie calculata suma elementelor aflate la un moment dat in stiva
- Daca suma depaseste pe n, atunci ev=0!

```
int solutie(int k)
{
   int s=0;
   for(i=1;i<=k;i++)
          s+=st[i];
   if( s == n ) return 1;
         else return 0;
}
void tipar(void)
{
  for(i=1;i<=k;i++)
    cout<<"  "<<st[i];
  cout<<"\n";
}
```

- Trebuie calculata suma elementelor aflate la un moment dat in stiva
- Daca suma este egala cu n, atunci am gasit o solutie!

```
int main(void)
{
   cout<<"Dati n = "; cin>>n;
   k=1; init(k,st);
   while (k>0)
  {
        do{
            as=succesor(k,st);
            if (as) ev=valid(k,st);
         }while (!( !as || (as && ev)));
        if (as)
              if (solutie(k)) tipar();
              else
               {
                  k++;
                  init(k,st);
               }
        else
                  k--;
  }
}
```


E:\Universitate\2009-2010\Semestrul
Dati n = 5
1 1 1 1 1
1 1 1 2
1 1 2 1
1 1 3
1 2 1 1
1 2 2
1 3 1
1 4
2 1 1 1
2 1 2
2 2 1
2 3
3 1 1
3 2
4 1
5
Terminated with return code 0
Press any key to continue ...

Problema 4

Să se descompună un număr natural n, în toate modurile posibile, ca sumă de p numere naturale (p<=n).

Exemplu:

Pentru n=5 si p=3 se obtin solutiile:

1+1+3; 1+3+1; 3+1+1;

1+2+2; 2+1+2; 2+2+1;

Implementarea programului:

```
#include<iostream.h>
int st[20],k,as,ev,n,l,p;
void init(int k,int st[ ])
{
  st[k]=0;
}
int succesor(int k,int st[ ])
{
   if ( st[k]<n )
          {
           st[k]=st[k]+1;
           as=1;
           }
      else as=0;
    return as;
}
```

```
int valid(int k,int st[ ])
{
   int s=0;
   ev=1;
   for(i=1;i<=k;i++)
         s+=st[i];
   if( s > n ) ev=0;
   return ev;
}
```

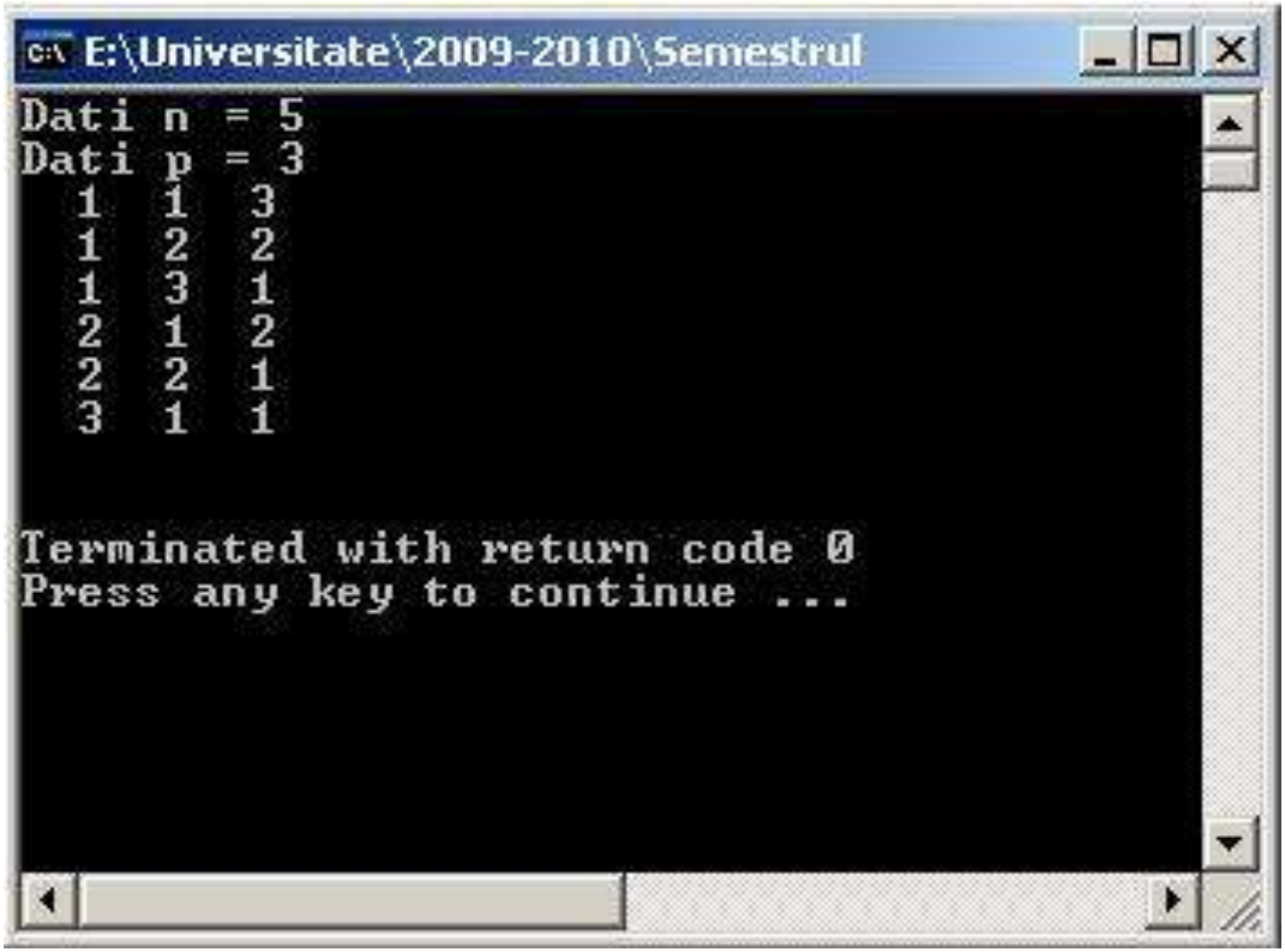
- Trebuie calculata suma elementelor aflate la un moment dat in stiva
- Daca suma depaseste pe n, atunci ev=0!

```
int solutie(int k)
{
   int s=0;
   for(i=1;i<=k;i++)
          s+=st[i];
   if( s == n && k == p ) return 1;
         else return 0;
}

void tipar(void)
{
  for(i=1;i<=k;i++)
    cout<<"  "<<st[i];
  cout<<"\n";
}
```

- Trebuie calculata suma elementelor aflate la un moment dat in stiva
- Daca suma este egala cu n, atunci am gasit o solutie!
- In plus trebuie sa avem fix p elemente in stiva!

```
int main(void)
{
   cout<<"Dati n = "; cin>>n;
   cout<<"Dati p = "; cin>>p;
   k=1; init(k,st);
   while (k>0)
  {
        do{
            as=succesor(k,st);
            if (as) ev=valid(k,st);
         }while (!( !as || (as && ev)));
        if (as)
              if (solutie(k)) tipar();
              else
               {
                  k++;
                  init(k,st);
               }
        else
                  k--;
  }
}
```


E:\Universitate\2009-2010\Semestrul
Dati n = 5
Dati p = 3
1 1 3
1 2 2
1 3 1
2 1 2
2 2 1
3 1 1
Terminated with return code 0
Press any key to continue ...

Problema 5

Problema colorării hărților

Fiind dată o hartă cu n țări, se cere **o soluție** de colorare a hărții, utilizând cel mult 4 culori, astfel încât două țări cu frontiera comună să fie colorate diferit.

O soluție este:

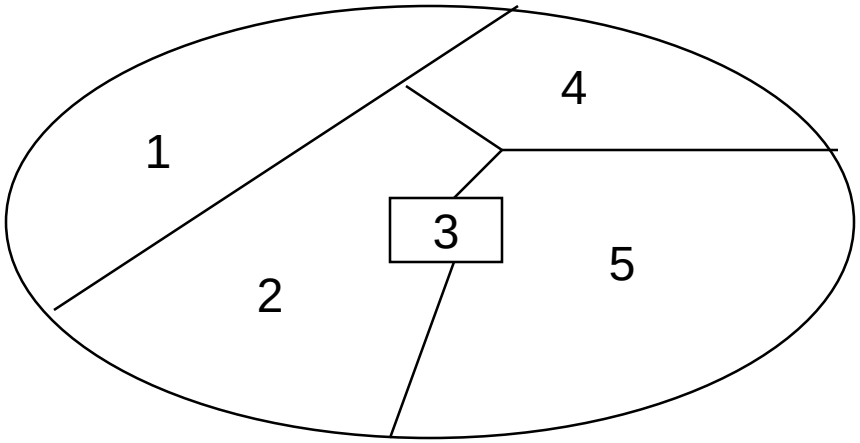
Țara 1 – culoarea 1

Țara 2 – culoarea 2

Țara 3 – culoarea 1

Țara 4 – culoarea 3

Țara 5 – culoarea 4



Pentru a specifica harta utilizam o matrice patratica cu valori binare:

$$A(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{daca țara i are frontieră comună cu țara j} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Se va utiliza stiva st, unde nivelul k al stivei simbolizează ţara k, iar st[k] culoarea ataşată ţării k.
- Stiva are înălţimea n şi pe fiecare nivel ia valori intre 1 şi 4, adică numărul culorilor este maxim 4.
- Condiţia ca două ţări vecine sa aibă aceeaşi culoare este:

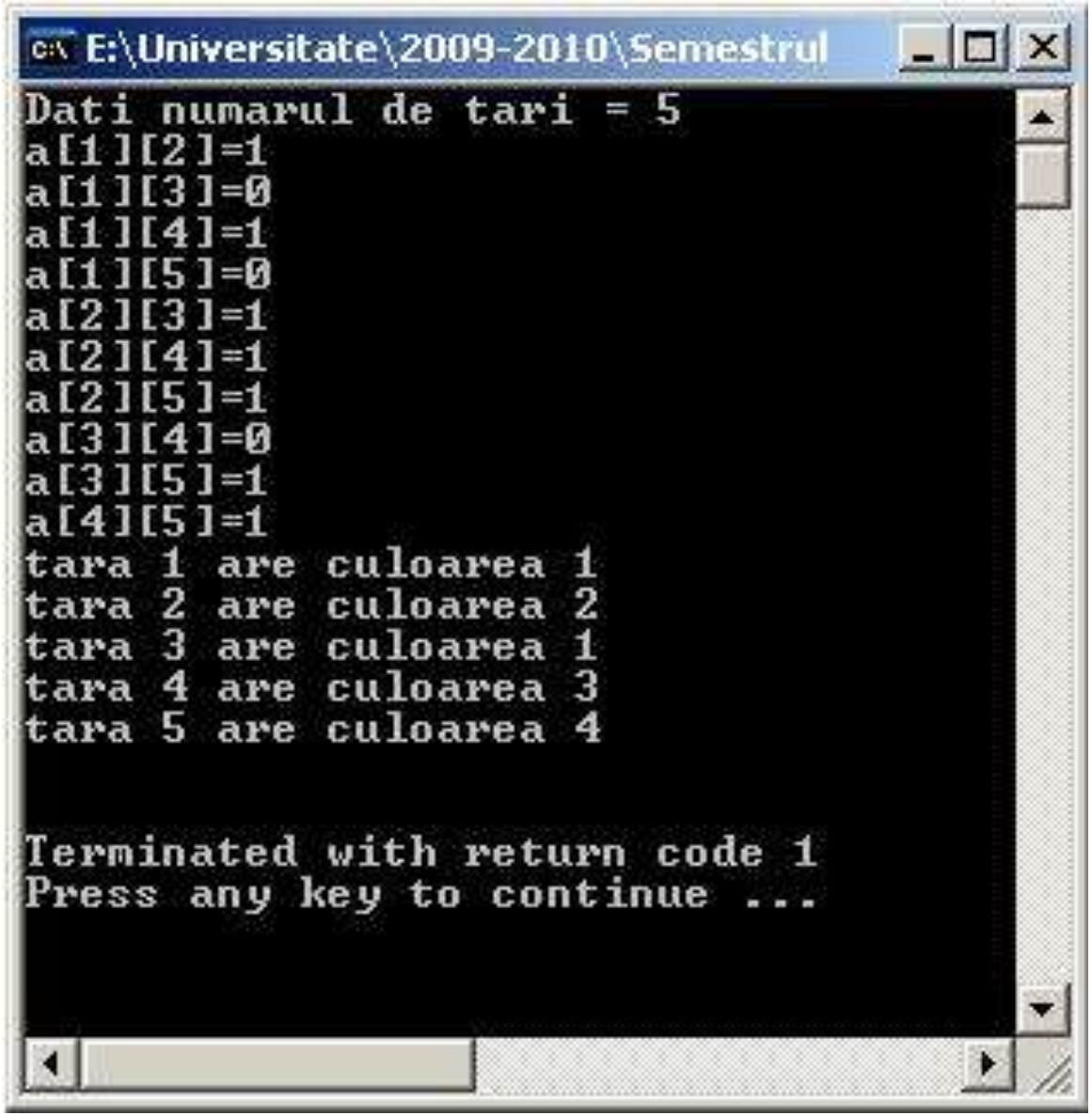
(st[k]==st[i]) && (a[i][k])==1)

```
#include<iostream.h>
#include<stdlib.h>
int st[20],k,as,ev,n,i,j,a[20][20];
void init(int k,int st[ ])
{
  st[k]=0;
}
int succesor(int k,int st[ ])
{
   if ( st[k] < 4 )
          {
           st[k]=st[k]+1;
           as=1;
           }
      else as=0;
    return as;
}
```

```
int valid(int k,int st[ ])
{
   ev=1;
   for(i=1;i<=k-1;i++)
         if(st[k] == st[i] && a[i][k] == 1) ev=0;
   return ev;
}
```

```
int solutie(int k)
{
   if( k == n ) return 1;
          else return 0;
}
void tipar(void)
{
  for(i=1;i<=k;i++)
    cout<<"tara "<<i<<" are culoarea "<<st[i]<<"\n";
  exit(1);
 }
```

```
int main(void)
{
  cout<<"Dati numarul de tari = "; cin>>n;
  for(i=1;i<=n-1;i++)
      for(j=i+1;j<=n;j++)
      {
            cout<<"a["<<i<<"]["<<j<<"]=";
            cin>>a[i][j];   a[j][i]=a[i][j];
      }
  k=1; init(k,st);
  while (k>0)
 {
       do{
          as=succesor(k,st);
          if (as) ev=valid(k,st);
        }while (!( !as || (as && ev)));
       if (as)
            if (solutie(k)) tipar();
            else
             {  k++;   init(k,st);   }
       else   k--;
 }
}
```


E:\Universitate\2009-2010\Semestrul
Dati numarul de tari = 5
a[1][2]=1
a[1][3]=0
a[1][4]=1
a[1][5]=0
a[2][3]=1
a[2][4]=1
a[2][5]=1
a[3][4]=0
a[3][5]=1
a[4][5]=1
tara 1 are culoarea 1
tara 2 are culoarea 2
tara 3 are culoarea 1
tara 4 are culoarea 3
tara 5 are culoarea 4
Terminated with return code 1
Press any key to continue ...

Problema 6

Problema comis-voiajorului

Un comis-voiajor trebuie sa viziteze *n* orase etichetate 1,...,n. Va pleca din orasul 1 si se va intoarce tot in 1, trecand prin fiecare oras (in afara de orașul 1, celelalte orase trebuie vizitate o singura data).

Cunoscand legaturile existente intre orase, sa se tipareasca toate drumurile posibile.

Rezolvare:

Datele referitoare la drumurile dintre orase vor fi reprezentate intr-o matrice A_{nxn} cu:

A_{ij} = 1 daca drum direct intre orasul i si orasul j

0 nu exista drum direct intre orasul i si orasul j

A_{ii} = 0

Implementarea solutiei ramane ca tema!

Problema 6

Vectorul solutiilor rezultat va fi $x=(x_1, \dots , x_n, x_{n+1})$ cu $x_1=x_{n+1}=1$ si cu semnificatia:

pe poz. i (i=1, *n* +1) se viziteaza orasul x care apartine S.

La pasul k (2<=k<=n) se incearca vizitarea orasului x[k]+1 daca:

(1) 1<=x[k]<n (initial x[k]=1)

si a[x[k-1], x[k]+1]=1 (pt. k=n trebuie si a[1, x[k]+1]=1)

Daca (1) este adevarata atunci x[k]<-x[k]+1 si trebuie sa fie satisfacute conditiile interne:

(2) x[k] != x[i] cu i=1,…,k-1

Daca (1) si (2) sunt adevarate se poate trece la vizitarea orasului k+1.

In caz contrar cu orasul de pe pozitia x_k nu ajungem la o soluție rezultat si va trebui sa ne intoarcem la o alta alegere pentru orasul de pe pozitia k-1.

Conţinutul cursului

11.1. Exemple de probleme rezolvate cu ajutorul metodei backtracking

11.2. Metoda backtracking – varianta recursiva

11.3. Backtracking generalizat in plan

11.2. Backtracking recursiv

Functiile folosite sunt in general aceleasi, cu doua mici exceptii:

1. In functia SOLUTIE conditia este n+1;
2. rutina backtracking se transforma in functie, care se apeleaza prin BACK(1)

Principiul de functionare al functiei BACK, corespunzator unui nivel k este urmatorul:

- in situatia in care avem o solutie, o tiparim si revenim pe nivelul anterior
- in caz contrar se initializeaza nivelul si se cauta un succesor
- cand am gasit unul verificam daca este valid; functia se autoapeleaza pentru (k+1), in caz contrar urmand a se continua cautarea succesorului;
- daca nu avem succesor, se trece pe nivel inferior (k-1) prin iesirea din functia BACK

Implementarea algoritmului pentru generarea permutarilor – varianta recursiva:

```
#include<iostream.h>
int st[20],k,p,as,ev,n;
void init(int k,int st[ ])
{
  st[k]=0;
}
int succesor(int k,int st[ ])
{
   if ( st[k]<n )
          {
           st[k]=st[k]+1;
           as=1;
           }
     else as=0;
     return as;
}
```

```
int valid(int k,int st[ ])
{
   ev=1;
   for (int i=1;i<=k-1;i++)
                if (st[i]==st[k]) ev=0;
   return ev;
}
int solutie(int k)
{
    if ( k==n+1 ) return 1;
    else return 0;
}
void tipar(void)
{
  for(int i=1;i<=n;i++)
     cout<<"  "<<st[i];
  cout<<"\n";
 }
```

```
void back(int k)
{
    if(solutie(k)) tipar();
    else{
                    init(k,st);
                    while(succesor(k,st))
                    {
                            ev=valid(k,st);
                            if(ev) back(k+1);
                    }
          }
}
int main(void)
{
   cout<<"Dati n = "; cin>>n;
   back(1);
}
```

Conţinutul cursului

11.1. Exemple de probleme rezolvate cu ajutorul metodei backtracking

11.2. Metoda backtracking – varianta recursiva

11.3. Backtracking generalizat in plan

11.3. Backtracking generalizat in plan

Backtraking generalizat în plan

Metoda Backtracking în plan are câteva modificări:

- stiva conţine mai multe coloane (este dublă, triplă, ...);

- trebuiesc codificate oarecum direcţiile prin numere, litere, elemente, etc.

Problema labirintului se poate rezolva după un algoritm de backtracking generalizat în plan.

11.3. Backtracking generalizat in plan

Problema labirintului

Se dă un labirint sub formă de matrice de m linii şi n coloane.

Fiecare element al matricii reprezintă o cameră.

Într-una din camerele labirintului se găseşte un om.

Se cere să se afle toate soluţiile ca acel om să iasă din labirint, fără să treacă de două ori prin aceeaşi cameră.

11.3. Backtracking generalizat in plan

Generalizare

- Această variantă a problemei este varianta în care fiecare cameră are pereţii proprii în părţile laterale.
- Există o altă variantă în care fiecare element al matricii este fie un culoar, fie un perete, putându-se trece doar dintr-un culoar în altul.
- Aici, se poate trece dintr-o cameră în alta, doar dacă între cele două camere nu există perete (camerele sunt imediat apropiate).
- Prin labirint, putem trece dintr-o cameră în alta doar mergând în sus, în jos, la stânga sau la dreapta, nu şi în diagonală.

11.3. Backtracking generalizat in plan

Codificare

- Principiul backtracking generalizat spune că trebuiesc codificate direcţiile.
- În aceste caz vor fi codificate şi combinaţiile de pereţi ai fiecărei camere.
- Asftel, un element al camerei va fi un element al unei matrici cu n linii şi n coloane, având valori de la 0 la 15.

- În sistemul binar, numerele 0..15 sunt reprezentate ca 0..1111, fiind memorate pe 4 biţi consecutivi.
- Vom lua în cosiderare toţi cei 4 biţi, astfel numerele vor fi 0000..1111.
- Fiecare din cei 4 biţi reprezintă o direcţie, iar valoarea lui ne spune dacă în acea direcţie a camerei există sau nu un perete.
- Vom reprezenta numărul astfel:

nr = b1 b2 b3 b4 (b = bit)

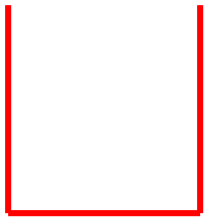
- Asftel, b1 indică direcţia nord (sus), b2 indică direcţia est (dreapta), b3 indică direcţia sud (jos) iar b4 indică direcţia vest (stânga).

- Valorile unui bit sunt, fireşte, **0** şi **1**.

  0 înseamnă că în direcţia respectivă *nu există un perete*,

  iar **1** înseamnă că în direcţia respectivă *există un perete şi pe acolo nu se poate trece*.

- De exemplu: 0111 - camera aceasta are pereţi în dreapta, în jos şi în stânga, iar în sus este drum liber spre camera vecină.



- Acest număr este de fapt 7, aşa fiind notat în matricea labirintului.

- În ceea ce priveşte direcţiile, vom reţine doar coordonatele unde se află omul din labirint, acestea fiind schimbate în funcţie de drumul pe care-l urmează.
- Vom avea o stivă triplă astfel:

- coloana 1 va indica direcţia. Aceasta va fi de la 1 la 4, 1 reprezentând sus, 2 reprezentând dreapta, 3 reprezentând jos, iar 4, stânga.
- coloana 2 va reţine indicele de linie al camerelor parcurse în labirint
- coloane 3 va reţine indicele de coloană al camerelor parcurse în labirint
- fiecare linie va însemna o cameră, cu indicele de linie şi de coloană

11.3. Backtracking generalizat in plan

Astfel:

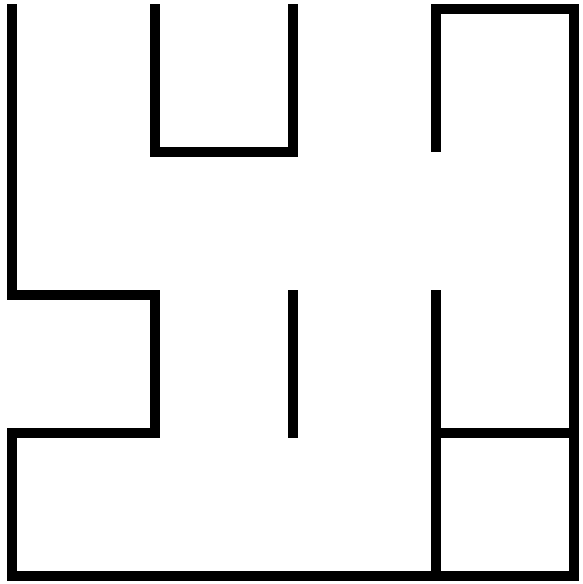
- dacă direcţia este 1 (sus), linia se va micşora cu 1,
- dacă direcţia este 2 (dreapta), coloana se va mări cu 1,
- dacă direcţia este 3 (jos), linia se va mări cu 1,
- dacă direcţia este 4 (stânga), coloana se va micşora cu 1.

Exemplu:

Să presupunem că introducem următoarea matrice:

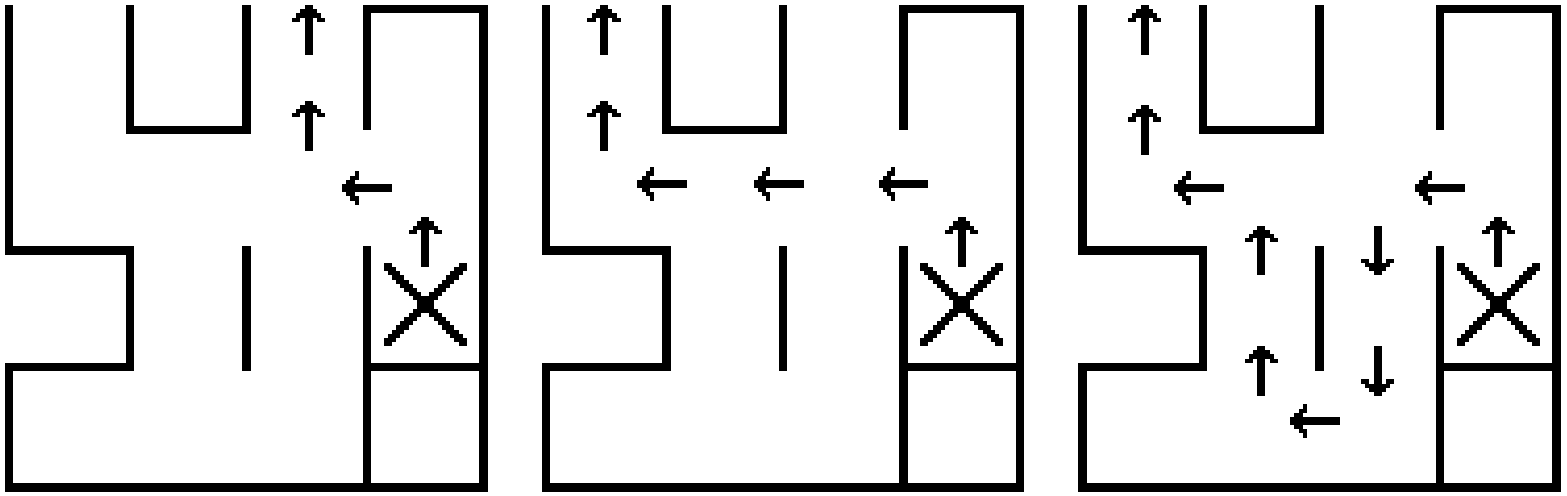
5	7	5	13
3	8	0	4
14	5	5	7
11	2	6	15

Această matrice corespunde labirintului din desen:



- Punctul de pornire din acest labirint este linia 3, coloana 4.
- Astfel, avea 3 soluţii de a ieşi din labirint, fără a trece de două ori prin aceeaşi cameră:

- (3,4)-(2,4)-(2,3)-(1,3) -ieşire
- (3,4)-(2,4)-(2,3)-(2,2)-(2,1)-(1,1) -ieşire
- (3,4)-(2,4)-(2,3)-(3,3)-(4,3)-(4,2)-(3,2)-(2,2)-(2,1)-(1,1) -ieşire



11.3. Backtracking generalizat in plan

Rezolvare

- După metoda backtracking, trebuiesc găsite toate posibilităţile de a ieşi din labirint.
- S-a ieşit din labirint când linia este 0, coloana este 0, linia este m+1 sau când coloana este n+1.
- Trebuie să trecem din cameră în cameră, să verificăm toate posibilităţile de ieşire.

11.3. Backtracking generalizat in plan

- Când trecem dintr-o cameră în alta, reţinem în matricea triplă, direcţia, linia şi coloana respectivă.
- Va trebui să respectăm regulile preoblemei, adică să nu trecem de două ori prin aceeaşi cameră.
- Această regulă a fost impusă deoarece dacă am rezolva problema fără ea, atunci ne-am învârti în gol !
- Această verificare se face comparând coordonatele camerei în care suntem cu coordonatele camerelor prin care am trecut, cele reţinute de matricea triplă pe coloanele 2 şi 3.

- Pentru a verifica dacă între două camere există sau nu un perete, va trebui să respectăm un lucru: dacă o cameră are perete în sus, atunci obligatoriu şi camera de sus trebuie să aibă perete jos, iar dacă o cameră nu are perete sus, atunci nici camera de sus nu trebuie să aibă perete jos.
- Aceasta deoarece dacă ar fi aşa, am trece dintr-o cameră în alta, dar invers nu, ceea ce este imposibil.
- Imaginaţi-vă că sunteţi într-o cameră. Vreţi să ieşiţi în hol. Din cameră se vede holul şi uşa, dar după ce ieşiţi în hol şi vreţi să reveniţi în cameră, vă întoarceţi şi constataţi că în spatele vostru nu există nici o uşă pentru a intra înapoi în cameră, în locul ei fiind doar un perete.

Astfel vom verifica după relaţiile:

- a[st[k][2],st[k][3]] && 8 = 0 - nu putem merge în sus
- a[st[k][2],st[k][3]] && 4 = 0 - nu putem merge la dreapta
- a[st[k][2],st[k][3]] && 2 = 0 - nu putem merge în jos
- a[st[k][2],st[k][3]] && 1 = 0 - nu putem merge la stânga

A – matricea labirintului ST – stiva triplă

- Operatorul logic && verifică biţii corespunzători ai 2 numere întregi, returnând 1 dacă ambii sunt 1 şi 0 în rest.
- Acesta este rezultatul final. 8 înseamnă 1000, adică dacă camera respectivă are perete sus, rezultatul va fi tot 8, dacă nu, va fi 0.

- Când mergem prin labirint, înaintâm în camera respectivă iar apoi verificăm dacă între cele două camere există sau nu perete pentru a putea trece pe acolo.
- Apoi verificăm să nu fi ieşit din labirint (l1<1 || l1>m || c1<1 || c1>n) şi dacă prin această cameră am mai trecut odată.

Afişare

- Când am găsit o soluţie, afişăm pe rând toate liniile din matricea triplă, dar fără coloana 1, ci numai coloanele 2 şi 3.

Întrebări?